

РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ

doi 10.17072/1994-9960-2018-2-177-195

УДК 330.341.42

ББК 65.20

JEL Code E17, E52, E61

**ВЛИЯНИЕ ТЕНЕВОГО СЕКТОРА ЭКОНОМИКИ НА ПОВЕДЕНИЕ  
ГЕТЕРОГЕННЫХ АГЕНТОВ****Серков Леонид Александрович**ORCID ID: 0000-0002-3832-3978, Researcher ID: [M-2991-2018](#)Электронный адрес: [dsge2012@mail.ru](mailto:dsge2012@mail.ru)

Институт экономики УрО РАН

620014, Россия, г. Екатеринбург, Московская, 29

Рассматривается влияние теневого, неформального сектора и сектора домашних хозяйств, производящих блага для собственного потребления, на динамику стохастической модели с неоднородными (гетерогенными) агентами. В исследовании применяется подход общего равновесия, позволяющий объяснить поведение спроса, предложения и цен в экономике с несколькими взаимодействующими рынками. Анализируемая модель описывает экономику с агрегированной неопределенностью и с бесконечным числом гетерогенных агентов (домашних хозяйств). Источником гетерогенности являются идиосинкратические шоки доходов агентов в легальном и теневом секторах экономики. Наличие двух секторов экономики (легального и теневого) приводит соответственно к двум источникам неоднородности, связанным с индивидуальным распределением доходов домашних хозяйств в этих секторах. При анализе применяется алгоритм аппроксимации динамики функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов – динамикой ее первого и второго моментов. Параметры модели оцениваются байесовским методом на эмпирических данных экономики России. Существенным фактом является то, что функция правдоподобия модели с неоднородными агентами имеет большее значение по сравнению с аналогичной функцией для модели с репрезентативными агентами, т. е. исследуемая модель более адекватно описывает эмпирические данные российской экономики. Поведение функций импульсного отклика основных переменных модели подтверждает факт позитивного влияния теневой экономики (ниже определенного предела) на минимизацию темпов снижения экономических показателей во время рецессий, особенно для развивающихся экономик. Новизна результатов исследования определяется тем, что при анализе динамики агрегированных переменных в исследуемой модели с двумя источниками гетерогенности учитываются не только моменты первого порядка функции распределения запасов капитала, но и моменты второго порядка. Дальнейшие перспективы исследования могут быть связаны с применением более детализированных моделей общего равновесия, позволяющих, в частности, описать поведение неоднородных групп агентов в предпринимательском секторе экономики.

*Ключевые слова:* гетерогенные агенты, ожидания, идиосинкратические шоки, агрегированная неопределенность, теневая экономика, неформальный сектор экономики, легальный сектор экономики, сектор домашних хозяйств, байесовский метод, общее экономическое равновесие.



## **INFLUENCE OF A SHADOW SECTOR OF ECONOMY ON HETEROGENEOUS AGENT BEHAVIOR**

**Leonid A. Serkov**

ORCID ID: [0000-0002-3832-3978](https://orcid.org/0000-0002-3832-3978), Researcher ID: [M-2991-2018](https://orcid.org/M-2991-2018)

Institute of Economics, the Ural branch of the Russian Academy of Sciences  
29, Moskovskaya st., Ekaterinburg, 620014, Russia

The influence of the shadow, informal and household sectors that produce goods for own consumption on the dynamics of a stochastic model with heterogeneous agents is considered. The general equilibrium approach that explains the behavior of demand, supply and prices in economy with several interactive markets is used in the study. The model under consideration describes an economy with aggregated uncertainty and with an infinite number of heterogeneous agents (households). The source of heterogeneity is the idiosyncratic shocks of agents' incomes in the legal and shadow sectors of economy. The presence of two sectors of the economy (legal and shadow) leads, respectively, to two sources of heterogeneity associated with the individual distribution of household income in these sectors. In the analysis an approximation algorithm of the dynamics of capital supply functions of individual agents – the dynamics of its first and second moments is used. The parameters of the model are estimated by the Bayesian method in the case study of the empirical data of Russian economy. An important fact is that the likelihood function of the model with heterogeneous agents is more important than the analogous model for the model with representative agents, i. e. the model under consideration describes the empirical data of Russian economy more adequately. The behavior of the impulse response functions of the basic variables of the model confirms the positive influence of the shadow economy (below a certain limit) on minimizing the rates of decline in economic indicators during recessions, especially for developing economies. The original result is that when analyzing the dynamics of aggregated variables in the model under consideration with two sources of heterogeneity, it is necessary to take into account not only the first-order moments of the distribution function of capital stocks, but also second-order moments. The further prospects of research can be connected to the application of more detailed models of the general (common) balance allowing, in particular, to describe also behavior of non-uniform groups of agents of enterprise sector of economy.

*Keywords: heterogeneous agents, expectations, idiosyncratic shocks, aggregated uncertainty, shadow economy, informal sector of economy, legal sector of economy, household sector, Bayesian method, general economic equilibrium.*

### **Введение**

**Д**инамические стохастические модели общего равновесия (DSGE-модели) являются теоретическим и прикладным фундаментом современной макроэкономики [1]. Эти модели являются мощным инструментом для разработки монетарной и фискальной политики, при анализе структурных изменений в экономике и объяснении причинно-следственных связей между эндогенными переменными. Данный инструмент используется при исследовании национальных экономик во многих странах [2; 3; 4]. Анализ макроэкономической политики России рассматривается в публикациях [5; 6; 7].

Практически все результаты, полученные с помощью DSGE-моделей, базируются на принципе репрезентативности экономических агентов с рациональными

ожиданиями [8; 9]. Данный принцип является одним из самых критикуемых при использовании этих моделей, так как он уравнивает макро- и микроэкономическое поведение агентов. Вместе с тем анализ моделей с гетерогенными агентами является важным как в прикладном, так и в теоретическом аспекте. Во-первых, с помощью этих моделей можно изучать поведение различных групп агентов в рамках подхода общего равновесия. Во-вторых, одной из главных целей при анализе DSGE-моделей является разработка стабилизационной монетарной и фискальной политики. Поэтому возникает вопрос, как разрабатывать подобную политику при разном реагировании на нее индивидуальных агентов.

В предлагаемой публикации исследуется DSGE-модель, в которой агенты испытывают идиосинкратические шоки,

связанные, например, с различием в индивидуальных доходах экономических агентов, и системные агрегированные шоки общефакторной производительности. Наличие этих двух видов шоков приводит к ослаблению гипотезы рациональности ожиданий, так как для анализа подобных моделей необходима соответствующая аппроксимация функции распределения доходов агентов [10; 11; 12].

Исследованию моделей при наличии агрегированных неопределенностей (шоков) с гетерогенными агентами посвящен ряд работ [13; 14; 15]. Здесь приведены лишь наиболее значимые работы по исследованию моделей с гетерогенными агентами и наличием агрегированных шоков, в которых источником неоднородности является различие в индивидуальных доходах экономических агентов. Не приводятся публикации по анализу DSGE-моделей с гетерогенными ожиданиями и с гетерогенными предпочтениями агентов. Во всех перечисленных работах присутствует лишь один источник гетерогенности (один идиосинкратический шок), связанный с индивидуальным распределением доходов домашних хозяйств. Главный вывод, вытекающий из этих работ, заключается в том, что динамика агрегированных переменных в основном определяется динамикой первого момента функции распределения запасов капитала, т. е. динамикой агрегированного капитала. Таким образом, распределение запасов капитала среди индивидуальных агентов практически не влияет на макроскопическую динамику. Поэтому представляет интерес исследование макроскопической динамики в DSGE-моделях при наличии нескольких источников идиосинкратических и агрегированных шоков, что является одной из задач предлагаемой публикации. В данной работе анализируется поведение потребителей не только в легальном, но и в теневом секторах экономики. Наличие двух секторов экономики приводит соответственно к двум источникам гетерогенности, связанным с индивидуальным распределением доходов домашних хозяйств в этих секторах. Этим данная публикация

отличается от вышеприведенных работ в области исследования моделей с гетерогенными агентами в присутствии агрегированных шоков.

Вместе с тем исследование влияния теневого сектора экономики на макроэкономическую динамику безусловно представляет научный интерес. Так, анализ экономики посредством DSGE-моделей при наличии теневого сектора изучался в работах [16; 17], общим выводом которых является лучшее соответствие полученных теоретических результатов фактическим данным при наличии сектора нелегальной экономики. Все результаты в перечисленных публикациях основаны на принципе репрезентативности агентов. Поэтому результаты по макроэкономической динамике в моделях с теньвым сектором экономики и с гетерогенными агентами являются оригинальными. В частности, в предыдущей работе автора [12] показано, что наличие идиосинкратических шоков приводит к снижению корреляции заработной платы с объемом выпуска, по сравнению с корреляцией в моделях с репрезентативными агентами. Однако в цитируемой работе применялась лишь аппроксимация первого порядка для функции распределения доходов индивидуальных агентов. Кроме того, в этой и перечисленных выше публикациях анализируется только теневое (скрытое, формально законное) производство без учета операций в неформальном секторе экономики и в секторе производства домашних хозяйств для их собственного потребления.

Целью предлагаемой публикации является исследование влияния теневого сектора экономики, неформального производства и производства домашних хозяйств для собственного потребления на макроэкономическую динамику в DSGE-моделях и сравнение динамики агрегированных переменных в этих моделях с подобной динамикой в моделях с репрезентативными агентами. Параметры исследуемой модели оцениваются байесовским методом на эмпирических данных экономики России.

### Описание модели

**В** предлагаемой публикации исследуется динамическая стохастическая модель с агрегированной неопределенностью в виде шоков общефакторной производительности, гибкими ценами и неполными рынками. В модели присутствуют два источника гетерогенности – идиосинкратические шоки доходов домашних хозяйств в легальном и теневом секторах экономики. При этом агенты – домашние хозяйства имеют одинаковые потребительские предпочтения, т. е. они являются *ex post* неоднородными и *ex ante* однородными.

При исследовании применяется подход общего межвременного равновесия. Этот подход предполагает, что все экономические агенты (домашние хозяйства, производители, правительство) оптимизируют свою целевую функцию в рамках определенных ограничений. Домашние хозяйства максимизируют дисконтированный ожидаемый поток полезности путем выбора оптимальных траекторий потребления и часов досуга при заданном бюджетном ограничении. Фирмы максимизируют дисконтированный ожидаемый поток прибыли путем выбора в каждом периоде объема производства при заданном технологическом ограничении. Данная модель имеет следующую особенность: результатом ее решения являются структурные поведенческие правила (функции спроса и предложения на продукты и ресурсы) в зависимости от цены.

Росстат подразделяет экономическую деятельность, не наблюдаемую прямыми статистическими методами, на следующие категории: теневое производство, производство в неформальном секторе экономики, незаконные операции (не учитываются Росстатом) и производство домашних хозяйств для их собственного конечного использования. При этом теневое производство является формально законным видом деятельности, но намеренно скрываемым от органов государственной власти в целях уклонения от уплаты налогов или следования законодательным нормам. Неформальный сектор экономики

представляет производственную деятельность, осуществляемую незарегистрированными предприятиями сектора домашних хозяйств. Производство домашних хозяйств для собственного конечного использования представляет собой хозяйственную деятельность, в результате которой домашние хозяйства потребляют или капитализируют произведенные ими же товары и услуги.

В описываемой модели учитываются все группы операций, по которым Росстат производит корректировку валовой добавленной стоимости, т. е. теневое (скрытое) производство, операции в неформальном секторе экономики и производство домашних хозяйств для собственного потребления.

В модели рассматриваются три вида агентов – индивидуальные домашние хозяйства, фирмы и государственный сектор. При этом фирмы, действующие на конкурентных рынках, и домашние хозяйства составляют континуальное множество единичной массы (агенту присваивается индекс  $i \in [0,1]$ ). Домашние хозяйства, обладающие определенным запасом собственного и заемного капитала, осуществляют капиталовложения в фирмы по процентной ставке  $r_t$  (ставка арендной платы за капитал). Объем выпуска гомогенного продукта фирмами легального сектора описывается производственной функцией Кобба – Дугласа  $Y_{t,r} = z_{1,t} K_t^\alpha h_{t,r}^{1-\alpha}$ , где  $z_{1,t}$  – агрегированный шок общефакторной производительности в легальном секторе экономики. В производственной функции  $K_t$  – агрегированное значение капитала (на одного агента),  $h_{t,r}$  – количество отработанных часов в легальном секторе экономики. Считаем, что теневой сектор обладает более низкой капиталоемкостью по сравнению с легальным, поэтому объем выпуска фирм теневого сектора экономики описывается производственной функцией  $Y_{t,u} = z_{2,t} h_{t,u}^{\alpha u}$ , где  $z_{2,t}$  – агрегированный шок производительности в теневом секто-

ре экономики<sup>1</sup>,  $h_{t,u}$  – количество отработанных часов в теневом секторе экономики,  $\alpha_u \in [0,1]$ . Отметим, что  $z_{1,t}, z_{2,t}$  являются экзогенными стохастическими процессами.

При условии единичной цены гомогенного продукта доход фирм легального сектора экономики составляет  $R_{r,t} = (1 - \tau_F)Y_{t,r}$ , где  $\tau_F$  – постоянная ставка налога с прибыли,  $\tau_F \in (0,1)$ . Учтем также, что фирмы теневого сектора при обнаружении налоговыми органами их деятельности должны будут выплатить сумму  $s\tau_F$ , где множитель  $s > 1$  является штрафом за неуплату налогов. Тогда суммарный доход фирм составляет  $R_t = pR_{D,t} + (1 - p)R_{ND,t}$ , где  $p$  ( $p \in (0,1)$ ) – вероятность обнаружения налоговыми органами теневых операций фирм,  $R_{D,t}$  – суммарный доход фирм при обнаружении ими нарушений, аналогично  $R_{ND,t}$  – суммарный доход фирм при отсутствии обнаружения ими нарушений. При этом

$$R_{D,t} = (1 - \tau_F)Y_{t,r} + (1 - s\tau_F)Y_{t,u}, \quad (1)$$

$$R_{ND,t} = (1 - \tau_F)Y_{t,r} + Y_{t,u}, \quad (2)$$

$$R_t = (1 - \tau_F)Y_{t,r} + (1 - ps\tau_F)Y_{t,u}. \quad (3)$$

Максимизируя прибыль

$$\max_{(h_{t,r}, h_{t,u}, K_t)} (\Pi_t = R_t - w_{t,r}h_{t,r} - w_{t,u}h_{t,u} - r_t K_t)$$

с учетом (3) и выражений для производственных функций  $Y_{t,r}, Y_{t,u}$  получим уравнения

$$(1 - \alpha) \frac{Y_{t,r}}{h_{t,r}} = \frac{w_{t,r}}{(1 - \tau_F)}, \quad (4)$$

$$\alpha_u \frac{Y_{t,u}}{h_{t,u}} = \frac{w_{t,u}}{(1 - ps\tau_F)} \text{ при } (1 - ps\tau_F) > 0, \quad (5a)$$

$$h_{t,u} = 0 \text{ при } (1 - ps\tau_F) \leq 0, \quad (5b)$$

$$\alpha \frac{Y_{t,r}}{K_t} = \frac{r_t}{(1 - \tau_F)}, \quad (6)$$

где  $r_t = r(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})$  – ставка арендной платы за капитал,  $w_{t,r} = w_{t,r}(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})$ ,  $w_{t,u}$  – заработные платы агентов в легальном и теневом секторах экономики,  $K_t$  – агрегированное значение капитала. Уравнения (5a) – (5b) описывают оптимальный спрос на труд в теневом секторе экономики. Следовательно, если  $(1 - ps\tau_F) > 0$ , спрос на труд в теневом секторе существует до тех пор, пока предельная производительность труда в этом секторе не будет равна предельным издержкам. При  $(1 - ps\tau_F) \leq 0$  спрос на труд в теневом секторе отсутствует.

Неоднородные индивидуальные агенты – домашние хозяйства в каждый период времени  $t$  максимизируют дисконтированный ожидаемый поток полезности  $U(c_{it}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n})$  путем выбора оптимальных траекторий потребления и часов досуга при заданном бюджетном ограничении. Суммарный уровень потребления индивидуального агента описывается функцией с постоянной эластичностью замещения как в работе [16]:

$$c_{it} = (a(c_{it,m})^\gamma + (1 - a)(c_{it,n})^\gamma)^{1/\gamma}, \quad (7)$$

где переменная  $c_{it,m}$  – индивидуальный уровень потребления агентом товаров и услуг, производимых в легальном, теневом и неформальном секторах экономики. В дальнейшем будем называть эти секторы рыночным сектором. Переменная  $c_{it,n}$  – индивидуальный уровень потребления агентом товаров и услуг, производимых в секторе домашних хозяйств, для собственного конечного использования. Параметры  $a$  и  $(1 - a)$  являются весовыми факторами, параметр  $\gamma$  определяет эластичность замещения между двумя видами потребления  $c_{it,m}$  и  $c_{it,n}$ . Таким образом, задача максимизации ожидаемой дисконтированной суммы значений функции полезности принимает вид

<sup>1</sup> Кроме того, в теневом секторе часто используется тот же капитал, что и в легальном.

$$\{c_{it,m}, c_{it,n}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n}, h_{it,nu}\} \quad (8)$$

$$E_t \sum_{i=0}^{\infty} \beta^i U(c_{it,m}, c_{it,n}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n}, h_{it,nu}).$$

В выражении (8)  $E_t$  – оператор рациональных ожиданий. Переменные  $h_{it,r}$ ,  $h_{it,u}$ ,  $h_{it,nu}$ ,  $h_{it,n}$  – затраты агента на труд в легальном, теневом, неформальном секторах экономики и в секторе производства домашних хозяйств соответственно. Будем считать, что количество часов  $h_{it,nu}$  является неделимым ресурсом в составе количества часов в секторе производства домашних хозяйств для собственного конечного использования производимых благ  $h_{it,n}$ . Уровень потребления  $c_{it,n}$  зависит от затраченного времени  $h_{it,n}$  и применяемого уровня технологии  $z_{3,t}$ . Примем, что  $c_{it,n} = z_{3,t} h_{it,n}$ . Соответственно  $c_{it,nu} = Y_{it,nu} = z_{3,t} h_{it,nu}$ . Вследствие того что трудовой ресурс  $h_{it,nu}$  является неделимым, количество часов, отводимое на досуг индивидуальным агентом,  $l_{it} = 1 - h_{it,r} - h_{it,u} - h_{it,n}$ .

Домашние хозяйства имеют возможность инвестировать свои активы в физический капитал согласно уравнению  $k_{i,t+1} = i_{i,t} + (1 - \delta)k_{i,t}$ , где  $k_{it}$  – запас капитала индивидуального агента на начало периода, параметр  $\delta$  является нормой обесценения капитала,  $i_{i,t}$  – уровень инвестиций.

Бюджетное ограничение задачи в каждый период времени  $t$  для индивидуальных домашних хозяйств, потребляющих товары и услуги, производимые в рыночном секторе экономики, с учетом возможностей заимствования в реальных переменных записывается в виде

$$c_{it,m} + k_{i,t+1} = (1 - \tau_Y)((r_t(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})k_{it} + w_{t,r}(K_t, h_{t,r}, z_{1,t})e_{4,i,t}h_{it,r}) + w_{t,u}e_{5,i,t}h_{it,u} + (1 - \delta)k_{it} + (1 - \omega)R_{it,nu}), \quad (9)$$

$$e_{4i,t} = (1 - \rho_4) + \rho_4 e_{4i,t-1} + \zeta_{4i,t}, \quad \zeta_{4i,t} \sim N(0, \sigma_4^2),$$

$$e_{5i,t} = (1 - \rho_5) + \rho_5 e_{5i,t-1} + \zeta_{5i,t},$$

$$\zeta_{5i,t} \sim N(0, \sigma_5^2),$$

$$k_{i,t+1} \geq -B, \quad B \geq 0.$$

В бюджетном ограничении (9)  $R_{it,nu}$  – доход индивидуального агента от производства в неформальном секторе экономики. В соответствии с соображениями, согласно которым получены уравнения (1) – (3),  $R_{it,nu} = (1 - ps\tau_Y)z_{3,t}h_{it,nu}$ . Параметр  $\omega \in (0,1)$  характеризует долю издержек от дохода  $R_{it,nu}$  при изготовлении продукции в неформальном секторе экономики. В ограничении (9) предполагается различие в трудовом статусе и, как следствие, в заработных платах индивидуальных агентов в легальном  $w_{it,r} = w_{t,r}e_{4,i,t}$  и теневом секторе  $w_{it,u} = w_{t,u}e_{5,i,t}$ . Это различие обусловлено идиосинкратическими шоками  $e_{4,i,t}$  и  $e_{5,i,t}$ , подчиняющимися авторегрессионному процессу первого порядка. В бюджетном ограничении (9)  $\tau_Y$  – ставка налога на доход физических лиц,  $\tau_Y \in (0,1)$ . В дальнейшем для упрощения будем считать количество отработанных часов в отдельных секторах одинаковым для всех агентов<sup>1</sup>, то есть  $h_{it,r} = h_{t,r}$ ,  $h_{it,u} = h_{t,u}$ ,  $h_{it,n} = h_{t,n}$ ,  $h_{it,nu} = h_{t,nu}$ . Ограничение на запасы капитала  $k_{i,t+1} \geq -B$  (ограничение на заимствования) обеспечивает частичное страхование агентов против рисков уменьшения доходов и неотрицательность потребления. Более подробно с ограничением на заимствования можно познакомиться в работе [19].

<sup>1</sup> При наличии идиосинкратических шоков это предположение не влияет на общность результатов.

Экзогенные агрегированные шоки общекфакторной производительности  $z_{1,t}$ ,  $z_{2,t}$ ,  $z_{3,t}$  являются серийно коррелированными и изменяются в соответствии с уравнениями

$$z_{1,t} = (1 - \rho_1) + \rho_1 z_{1,t-1} + \zeta_{1,t}, \quad (10)$$

$$z_{2,t} = (1 - \rho_2) + \rho_2 z_{2,t-1} + \zeta_{2,t}, \quad (11)$$

$$z_{3,t} = (1 - \rho_3) + \rho_3 z_{3,t-1} + \zeta_{3,t}, \quad (12)$$

где  $\zeta_{i,t} \sim N(0, \sigma_i^2)$ ,  $i=1,2,3$  и  $\sigma_i^2$  – соответствующие дисперсии.

Однопериодная функция полезности, используемая в предлагаемой публикации, основанная на вышеназванных предположениях, имеет вид

$$U(c_{it}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n}) = \ln(c_{it}) - \Theta h_{it,nu} + \frac{B_m (l_t)^{1-\rho}}{1-\rho} - \frac{B_u h_{it,u}^{1+\zeta}}{1+\zeta}, \quad (13)$$

где суммарный уровень потребления  $c_{it}$  определяется равенством (7),  $l_t$  – количество часов досуга, параметр  $B_m$  определяет предпочтение досуга, параметры  $\Theta$  и  $B_u$  определяют предпочтение труда в неформальном и теневом секторах экономики соответственно. Параметры  $\rho, \zeta$  – обратные эластичности предложения труда в соответствующих секторах экономики. Заметим, что функция полезности (13) является возрастающей по переменной  $c_{it}$  и удовлетворяет условиям  $\lim_{c_{it} \rightarrow 0} \frac{\partial U(\cdot)}{\partial c_{it}} = \infty$  и

$\lim_{c_{it} \rightarrow \infty} \frac{\partial U(\cdot)}{\partial c_{it}} = 0$ . С учетом этих свойств положительность потребления всегда оптимальна.

Для абстрагирования от ограничения  $k_{i,t+1} \geq -B$  в виде неравенства следует заменить это ограничение стандартным добавлением в условие максимизации (8) штрафной функции [15] вида

$$P(k_{i,t+1}) = \frac{\eta_1}{\eta_0} \exp(-\eta_0(k_{i,t+1} + B)) - \eta_2(k_{i,t+1} + B), \quad (14)$$

где  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  – параметры штрафной функции. Условие максимизации (8) в этом случае примет вид

$$\{c_{it,m}, c_{it,n}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n}, h_{it,nu}\} \\ E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U(c_{it,m}, c_{it,n}, h_{it,r}, h_{it,u}, h_{it,n}, h_{it,nu}) - \varphi P(k_{i,t+1}). \quad (15)$$

Кроме домашних хозяйств и фирм в модели присутствует третий агент – государство. В каждом периоде времени  $t$  государство аккумулирует налоги для финансирования государственных расходов. Для упрощения абстрагируемся от государственного долга, трансфертов и предположим, что в каждый момент времени бюджет государства сбалансирован. В этом случае бюджетное ограничение со стороны государства можно записать в виде

$$g_t = \tau_Y \int_0^1 (r_t k_{it} + w_{t,r} e_{4,i,t} h_{it,r} + ps Y_{it,nu}) di + \tau_F (Y_{t,r} + ps Y_{t,u}). \quad (16)$$

Остановимся более подробно на решении задачи оптимизации. Задача оптимизации (15) решается в данной работе методами теории возмущений первого и второго порядка [14; 18]. Чтобы решить эту задачу, агенты должны уметь прогнозировать будущие цены труда и капитала. Для этого необходимо знать стохастический процесс, описывающий эволюцию агрегированного капитала. Стохастические свойства запасов агрегированного капитала зависят от распределения его среди всех индивидуальных агентов, поэтому для решения задачи оптимизации (15) необходима соответствующая аппроксимация функции распределения доходов (запасов капитала).

В предлагаемой публикации используется один из самых популярных подходов Р. Krusell and А. Smith [13], которые предложили аппроксимировать распределение доходов дискретным и конечным набором моментов  $m = (m_1, m_2, \dots, m_i)$ , где  $i$  – порядок момента. При этом они показали, что в модели с одним источником гетерогенности для функции распределения доходов достаточно аппроксимации первого порядка. Поскольку исследуемая модель характеризуется наличием двух источников гетерогенности, в предлагае-

мой публикации рассматривается аппроксимация распределения доходов индивидуальных агентов первого и второго порядков.

Основной целью подхода Р. Krusell and А. Smith является получение агрегированных и индивидуальных поведенческих функций. Для этого при аппроксимации первого порядка ( $i=1$ ) динамика функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов заменяется динамикой ее первого момента, т. е. воспринимаемым агентами законом изменения агрегированного капитала. Функциональную форму этого закона можно представить в виде

$$K_t = b_0 + b_K K_{t-1} + b_{z1}(z_{1,t} - z_1) + b_{z2}(z_{2,t} - z_2), \quad (17)$$

где  $z_1, z_2$  – стационарные детерминированные состояния шоков производительности  $z_{1,t}, z_{2,t}$ , параметры  $b_0, b_K, b_{z1}, b_{z2}$  характеризуют убеждения агентов относительно изменения агрегированного капитала и обновляются при каждой итерации [15].

При аппроксимации второго порядка воспринимаемый агентами закон изменения агрегированного капитала и соответствующих моментов записывается в виде

$$K' = f_2(K, z_1, z_2, M_{ke4}, M_{ke5}, M_{k^2}; \zeta), \quad (17a)$$

$$M'_{k^2} = f_2(K, z_1, z_2, M_{ke4}, M_{ke5}, M_{k^2}; \bar{\zeta}),$$

$$M'_{ke1} = f_2(K, z_1, z_2, M_{ke4}, M_{ke5}, M_{k^2}; \hat{\zeta}),$$

$$M'_{ke2} = f_2(K, z_1, z_2, M_{ke4}, M_{ke5}, M_{k^2}; \tilde{\zeta}),$$

где  $M_{k^2}, M_{ke1}, M_{ke2}$  – соответствующие моменты второго порядка,  $\zeta, \bar{\zeta}, \hat{\zeta}, \tilde{\zeta}$  – векторы коэффициентов перед соответствующими переменными, переменные со штрихом относятся к периоду  $t+1$ , временные индексы опущены.

Пошаговая реализация алгоритма Р. Krusell and А. Smith применительно к исследуемой модели при аппроксимации первого порядка выглядит следующим образом.

1. Задаются начальные значения вектора параметров убеждений агентов  $b$

из компонент  $b_0, b_K, b_{z1}, b_{z2}$ , запасов капитала  $k_{it}$  для  $N$  индивидуальных агентов. Начальные значения задаются из условий максимальной скорости схождения алгоритма.

2. Генерируется временная последовательность агрегированных и идиосинкратических шоков длиной  $T$ .

3. Для заданного вектора параметров  $b$  и закона изменения агрегированного капитала (17) решается задача оптимизации (15) с функцией полезности (13) и ограничениями (7) – (12) с учетом (4) – (6), (17) для индивидуального агента. Результатом решения задачи оптимизации являются поведенческие функции (правила) для индивидуальных агентов  $k' = k(z_1, z_2, z_3, e_4, e_5, K')^1$ .

4. Используя полученные на третьем шаге оптимальные поведенческие функции (правила) для индивидуальных агентов, с помощью метода Монте-Карло проводится имитационное моделирование индивидуальных запасов капитала для совокупности  $N$  агентов. Агрегируя на каждом периоде симуляции запасы капитала индивидуальных агентов, получаем временной ряд  $K_t$ .

5. С помощью уравнения регрессии для агрегированного капитала  $K_t$  находится вектор параметров  $\tilde{b}$ .

6. Для обновления закона изменения агрегированного капитала задается вектор параметров  $\tilde{b}_{new}$  для следующей возможной итерации по правилу  $\tilde{b}_{new} = \lambda b + (1 - \lambda)\tilde{b}$ , где  $\lambda \in [0,1]$  – параметр обновления.

7. Повторяются шаги с третьего по шестой до тех пор, пока норма вектора разности  $\tilde{b}_{new} - \tilde{b}$  не будет превышать заданную величину ошибки.

При аппроксимации второго порядка обновление векторов коэффициентов

<sup>1</sup> Переменная со штрихом относится к периоду  $t+1$ , индексы – временные и индивидуальных агентов – опущены.



$\zeta, \bar{\zeta}, \hat{\zeta}, \tilde{\zeta}$  происходит через алгоритм агрегации. Итерации продолжаются до тех пор, пока  $\|Z^j(\bullet) - Z^{j-1}(\bullet)\| \leq \varepsilon$ , где  $\|Z\|$  – норма вектора, составленного из коэффициентов  $\zeta, \bar{\zeta}, \hat{\zeta}, \tilde{\zeta}$ ,  $\varepsilon$  – заданная величина ошибки.

При решении задачи оптимизации индивидуальные агенты обладают рациональными ожиданиями в слабой форме [8]. Поясним это подробнее. Пусть  $I_{t,h}$  – информационное множество, доступное агенту  $h$  в конце периода  $t$ , включающее в себя все структурные характеристики анализируемой системы. Множество  $I_{t,h}$  содержит текущие и предшествующие значения всех переменных модели и реализации всех случайных величин (шоков) в текущем и прошлых периодах. Пусть  $E_{t,h}u_{t+k}$  – субъективное ожидание (прогноз), сформированное агентом  $h$  относительно значения, которое примет переменная  $u$  в период времени  $t+k$ ,  $k \geq 1$ . Пусть также  $E[u_{t+k} | I_{t,h}]$  – объективное, т. е. вычисленное в силу модели, связывающей в конечном счете решения всех агентов, ожидаемое значение  $u_{t+k}$  при условии  $I_{t,h}$  (через  $E$  здесь обозначен оператор условного математического ожидания). В нашем исследовании объективные и субъективные ожидания не совпадают ввиду использования агентами при прогнозировании цен ограниченного аппроксимацией функции распределения доходов информационного множества, то есть  $E_{t,h}u_{t+k} = E[u_{t+k} | I_{t,h}] + \varepsilon_{t,h}$ , где  $E[\varepsilon_{t,h} | I_{t,h}] = 0$ . В результате функционирования алгоритма P. Krusell and A. Smith происходит минимизация ошибки  $\varepsilon_{t,h}$ .

#### Условия равновесия и решение модели

**И**дея экономического равновесия заключается в том, что каждый из агентов в модели предлагает свой план величины спроса и предложения на продукты и ресурсы [20]. Этот план условный, так как он

зависит от значений информационных переменных (цен на продукты и ресурсы) и имеет внешнее ограничение относительно значений агрегированных цен  $(w_{t,r}, w_{t,u}, r_t)$ .

В процессе взаимодействия агентов их планы согласовываются так, чтобы выполнялись включенные в модель материальные и финансовые системные балансовые соотношения.

Таким образом, применительно к исследуемой модели, общее равновесие устанавливается в результате:

*оптимизации:* агенты – домашние хозяйства решают задачу максимизации (15) при ограничениях (7) – (12) и заданных значениях  $w_{t,r}, w_{t,u}, r_t$  (4) – (6) и вос-

принимаемом агентами законе изменения агрегированного капитала (17). Результатом решения задачи оптимизации являются поведенческие функции агентов, зависящие от агрегированных шоков общефакторной производительности, идиосинкратических шоков, запасов капитала агентов, и согласованные с законом изменения агрегированного капитала (17);

*равновесия на рынке товаров и услуг:*

$$\int \left\{ \begin{array}{l} c(k, z_1, z_2, z_3, e_4, e_5, K') + \\ + k'(k, z_1, z_2, z_3, e_4, e_5, K') \end{array} \right\} di = Y_r + Y_u + (1 - \delta)K,$$

где  $c(\bullet), k'(\bullet)$  – поведенческие функции агентов; операция интегрирования заключается в суммировании по соответствующим функциям всех индивидуальных моделируемых агентов;

*ценового фактора:* заработные платы и процентная ставка определяются из условий максимизации прибыли фирм (4) – (6);

*агрегирования факторов производства:*  $K_t = \int k_{i,t} di, d, h_{t,r} = \int h_{i,t,r} di,$

$$h_{t,n} = \int h_{i,t,n} di, h_{t,nu} = \int h_{i,t,nu} di.$$

Максимизация (15) по отношению к (7), (9) и с учетом уравнений (4) – (6), (10) – (14), (17) приводит к системе уравнений для индивидуального агента исследуемой модели. Система уравнений модели, явля-

ющаяся результатом реализации алгоритма P. Krusell and A. Smith и соответствующая состоянию общего равновесия, выглядит следующим образом:

$$c_t = (a(c_{t,m})^\gamma + (1-a)(c_{t,n})^\gamma)^{1/\gamma}; \quad (18)$$

$$\frac{ac_{m,t}^{\gamma-1}}{(ac_{m,t}^\gamma + (1-a)c_{n,t}^\gamma)} = \lambda_t, \quad (19)$$

где  $\lambda_t$  – множитель Лагранжа;

$$\frac{(1-a)c_{n,t}^{\gamma-1}}{(ac_{m,t}^\gamma + (1-a)c_{n,t}^\gamma)} = \frac{1}{l_t} + B_m l_t^{-\rho}; \quad (20)$$

$$\Theta = \lambda_t (1 - ps\tau_Y) z_{3,t}; \quad (21)$$

$$\lambda_t = E_t \lambda_{t+1} + \beta(1 + (1 - \tau_Y)r_t - \delta); \quad (22)$$

$$l_t = 1 - h_{r,t} - h_{n,t} - h_{u,t}; \quad (23)$$

$$l_t^{-1} = -B_m l_t^{-\rho} + \lambda_t (1 - \tau_Y) w_{m,t}; \quad (24)$$

$$l_t^{-1} = -B_u l_t^{-\rho} + \lambda_t w_{u,t} - B_u h_{u,t}^\zeta; \quad (25)$$

$$z_{1,t} (1 - \tau_F) (1 - \alpha) K_t^\alpha h_{t,r}^{1-\alpha} = w_{t,r}; \quad (26)$$

$$z_{2,t} (1 - ps\tau_F) = w_{t,u}; \quad (27)$$

$$z_{1,t} (1 - \tau_F) \alpha K_t^{\alpha-1} h_{t,r}^{1-\alpha} = r_t; \quad (28)$$

$$c_{t,m} + K_{t+1} = (1 - \tau_Y) ((r_t (K_t, h_{t,r}, z_{1,t}) K_t + w_{t,r} (K_t, h_{t,r}, z_{1,t}) h_{t,r}) + w_{t,u} h_{t,u} + (1 - \delta) K_t + (1 - \omega) R_{t,nu}); \quad (29)$$

$$R_{t,nu} = (1 - ps\tau_Y) z_{3,t} h_{t,nu}; \quad (30)$$

$$Y_{t,nu} = z_{3,t} h_{t,nu}; \quad (31)$$

$$Y_{t,r} = z_{1,t} K_t^\alpha h_{t,r}^{1-\alpha}; \quad (32)$$

$$Y_{t,u} = z_{2,t} h_{t,u}; \quad (33)$$

$$c_{n,t} = z_{3,t} h_{t,n}; \quad (34)$$

$$g_t = \tau_Y (r_t K_t + w_{t,r} h_{t,r} + ps Y_{t,nu}) + \tau_F (Y_{t,r} + ps Y_{t,u}); \quad (35)$$

$$z_{1,t} = (1 - \rho_1) + \rho_1 z_{1,t-1} + \zeta_{1,t}; \quad (36)$$

$$z_{2,t} = (1 - \rho_2) + \rho_2 z_{2,t-1} + \zeta_{2,t}; \quad (37)$$

$$z_{3,t} = (1 - \rho_3) + \rho_3 z_{3,t-1} + \zeta_{3,t}. \quad (38)$$

Все переменные системы уравнений (18) – (38) являются агрегированными пе-

ременными. Эта система уравнений описывает модель, параметры которой связаны с предпочтениями гетерогенных (не репрезентативных!) агентов. Реализация алгоритма P. Krusell and A. Smith для анализа модели с гетерогенными агентами осуществлялась в программном пакете *Matlab*. При этом второй шаг алгоритма, т. е. решение задачи оптимизации для индивидуального агента, оценка параметров модели и окончательная реализация модели, осуществлялись в программном пакете *Dynare*<sup>1</sup>. При аппроксимации функции распределения запасов капитала моментами первого порядка решение уравнений модели выполнялось с помощью приближения первого порядка теории возмущений. Соответственно при аппроксимации функции распределения моментами второго порядка решение уравнений модели осуществлялось с помощью приближения второго порядка. Окончательная реализация модели происходила при значениях параметров, полученных после реализации алгоритма P. Krusell and A. Smith.

#### Оценка параметров модели

Параметры исследуемой модели при каждой итерации оценивались с помощью метода Байеса на эмпирических данных российской экономики. Байесовский статистический подход можно охарактеризовать как «обучающий» процесс, при котором вектор наблюдаемых переменных  $Y$  используется для получения информации об апостериорной функции плотности вероятностей  $f(\mathcal{G}|Y)$  распределения вектора параметров модели  $\mathcal{G}$  при заданной априорной функции плотности вероятности  $f(\mathcal{G})$  и функции правдоподобия  $L(\mathcal{G}; Y)$ . Байесовский статистический подход базируется на теореме Байеса [21]:

$$f(\mathcal{G}|Y) = \frac{f(\theta)L(\mathcal{G}; Y)}{f(Y)}, \quad (39)$$

где  $f(Y)$  – функция маргинального правдоподобия (нормализованная константа).

<sup>1</sup> Juillard M. *Dynare Manual*. CEPREMAP, 2004. 45 p.

Поскольку функция правдоподобия находится при решении DSGE-модели, можно определить вид числителя в (39), в то время как знаменатель является константой (не зависит от  $\mathcal{Y}$ ). Как уже отмечалось выше, при каждой итерации алгоритма P. Krusell and A. Smith происходит оценка параметров модели на основе (39) путем нахождения апостериорного максимума. При оценке модели использовались квартальные данные для российской экономики, с 1-го квартала 2003 г. по 4-й квартал 2015 г. Анализировались пять (по числу экзогенных шоков) эндогенных макроэкономических переменных – агрегированный, скорректированный ВВП (включая теневой сектор, сектор неформального производства и сектор домашних хозяйств), ВВП теневого сектора, зарплата в легальном секторе экономики, инвестиции, потребление домашних хозяйств<sup>1</sup>. Все переменные выражены в единицах на душу населения<sup>2</sup> и рассчитывались в постоянных ценах 2003 г. Для данных по ВВП теневого сектора экономики использовались годовые показатели корректировки валовой добавленной стоимости на экономические операции, не наблюдаемые прямыми статистическими методами<sup>3</sup>. Для перевода годовых показателей корректировки (процент к валовой добавленной стоимости) теневых операций в квартальные использовался аппарат сплайн-аппроксимации с последующей коррекцией полученных данных временных рядов [12].

Несколько параметров модели фиксировались [22; 23; 24]. Коэффициенты в штрафной функции выбраны из условий устойчивости и максимальной скорости сходимости алгоритма:  $\eta_0 = 0,4$ ,  $\eta_1 = 0,3$ ,  $\eta_2 = 0,4$ . Начальные значения коэффициентов в (17) для приближения первого порядка  $b_0 = 1,4$ ,  $b_K = 0,6$ ,  $b_z = 0,95$  и значение

параметра  $\lambda = 0,5$  также выбраны из условий максимальной скорости сходимости алгоритма. Параметры  $\alpha = 0,36$ ,  $\alpha_u = 1$ ,  $\delta = 0,025$ ,  $\beta = 0,99$ . Эти значения параметров наиболее часто используются при калибровке DSGE-моделей российской экономики [5; 6; 25]. Для упрощения кредитный лимит  $B=0$  (отсутствие чистого долга). Число моделируемых агентов  $N=1000$ , длина временной последовательности шоков  $T=10000$ . Параметр  $s$  принят равным  $1,3$ , параметр  $p=0,1$  исходя из штрафов за неуплату налогов. Налоговые ставки  $\tau_Y = 0,13$ ,  $\tau_F = 0,2$  (основные ставки)<sup>4</sup>. Коэффициент  $a$  в уравнении (7) принят равным  $0,830$  как среднее значение из данных по корректировке валовой добавленной стоимости на производство домашних хозяйств для собственного потребления.

Остальные параметры оценивались с помощью метода Байеса. Априорные распределения для всех параметров, как и апостериорные распределения, представлены в табл. 1. Для сравнения приведены данные для оцененных параметров в рамках модели с репрезентативными агентами. Отметим, что оценка всех параметров в табл. 1 происходила во время последней итерации на основе апостериорного максимума с помощью алгоритма случайного блуждания Метрополиса – Хастингса [21].

Далее характеризуем результаты моделирования влияния теневого, неформального сектора и сектора домашних хозяйств на динамику стохастической модели с неоднородными агентами.

<sup>1</sup> Источником данных являются официальные сайты Росстата и ЦБ.

<sup>2</sup> Реальная ставка заработной платы выражена в единицах на душу населения в час.

<sup>3</sup> Национальные счета России в 2000–2007 гг.: стат. сб. М.: Росстат, 2008; Национальные счета России в 2007–2014 гг.: стат. сб. М.: Росстат, 2015.

<sup>4</sup> Для упрощения косвенные налоги не учитываются, что не влияет на общность рассуждений и полученные результаты.

Таблица 1

**Оценка параметров исследуемой модели с гетерогенными и репрезентативными агентами по данным российской экономики**

Параметр	Априорное распределение			Апостериорное распределение			
				Модель с гетерогенными агентами		Модель с репрезентативными агентами	
	Тип	Среднее	Стат. отклонение	Среднее	t-stat	Среднее	t-stat
$\gamma$	Гамма	1,831	0,500	1,643	4,481	1,513	4,545
$B_u$	Гамма	1,921	0,500	2,458	11,897	2,532	13,161
$B_m$	Обр. Гамма	0,250	0,500	0,178	7,231	0,152	7,694
$\rho$	Обр. Гамма	0,300	0,500	0,261	7,613	0,373	8,604
$\Theta$	Бета	0,100	0,500	0,132	6,645	0,142	6,641
$\zeta$	Бета	0,14	0,200	0,291	1,741	0,413	1,787
$\rho_1$	Бета	0,900	0,200	0,667	4,787	0,665	4,981
$\rho_2$	Бета	0,900	0,200	0,783	4,254	0,815	21,654
$\rho_3$	Бета	0,900	0,200	0,862	11,787	0,812	66,765
$\rho_4$	Бета	0,900	0,200	0,662	9,281	0,612	61,141
$\rho_5$	Бета	0,900	0,200	0,612	6,265	0,667	31,234
$\sigma_1$	Обр. Гамма	0,040	1,000	0,066	8,498	0,049	8,114
$\sigma_2$	Обр. Гамма	0,040	1,000	0,019	7,441	0,021	7,123
$\sigma_3$	Обр. Гамма	0,040	1,000	0,011	3,361	0,013	4,554
$\sigma_4$	Обр. Гамма	0,040	1,000	0,016	2,356	0,012	3,427
$\sigma_5$	Обр. Гамма	0,040	1,000	0,013	3,234	0,011	3,567
<b>Логарифм маргинального правдоподобия</b>				<b>410,647</b>		<b>396,451</b>	

### Результаты моделирования

Существенным результатом оценки параметров является то, что функция правдоподобия (маргинальное правдоподобие) модели с гетерогенными агентами имеет большее значение по сравнению с аналогичной функцией для модели с репрезентативными агентами (табл. 1), т. е. исследуемая модель более адекватно описывает эмпирические данные российской экономики.

Данные апостериорного распределения свидетельствуют о существенном различии для параметров  $\rho$  и  $\zeta$  сравниваемых моделей. Эти параметры связаны с обратными эластичностями предложения

труда в легальном и теневом секторах экономики. Из табл. 1 видно, что значения этих параметров для модели с репрезентативными агентами намного больше, чем для модели с гетерогенными агентами, т. е. неоднородность распределения запасов капитала среди агентов способствует повышению эластичности предложения труда в соответствующих секторах экономики. Также следует отметить, что эластичность замещения  $\gamma$  между двумя видами потребления  $c_{it,m}$  и  $c_{it,n}$  для модели с гетерогенными агентами выше по сравнению с аналогичной эластичностью для модели с репрезентативными агентами. Значения

остальных параметров сравниваемых моделей различаются незначительно.

Как уже отмечалось, одной из целей предлагаемой публикации является сравнение динамики агрегированных переменных в исследуемой модели с двумя идиосинкратическими шоками с подобной динамикой в моделях с репрезентативными агентами. В табл. 2 приведена статистика агрегированных переменных: суммарного потребления  $c$ , потребления в рыночном секторе  $c_m$  и секторе домашних хозяйств  $c_n$  при одинаковых симуляциях шоков<sup>1</sup> общефакторной производительности. Из данных таблицы следует, что при наличии в исследуемой модели идиосинкратических шоков игнорирование моментов выше первого порядка в функции распределения запасов капитала может привести к значительной ошибке. В большей степени это относится к суммарному потреблению

и потреблению в рыночном секторе экономики.

Стандартные отклонения этих переменных при аппроксимации второго порядка отличаются от отклонений в модели с репрезентативными агентами. Полученные оригинальные результаты выявляют отличие в поведении агрегированных переменных в исследуемой модели с двумя идиосинкратическими шоками от динамики агрегированных переменных в моделях с одним источником гетерогенности [13; 14; 15]. Данное отличие можно объяснить тем, что в модели с двумя источниками гетерогенности агенты подвержены повышенному риску получения дохода. Таким образом, при анализе динамики агрегированных переменных необходимо учитывать не только моменты первого порядка функции распределения запасов капитала, но и моменты второго порядка.

Таблица 2

**Влияние идиосинкратических шоков на агрегированные переменные**

Статистика агрегированной переменной*	Модель с репрезентативными агентами**		Модель с идиосинкратическими шоками**	
	Аппроксимация первого порядка	Аппроксимация второго порядка	Аппроксимация первого порядка	Аппроксимация второго порядка
Среднее значение $c$ (%СС)	0	-0,13	0	-3,128
Стандартное отклонение $c$	0,02	0,02	0,077	0,087
Среднее значение $c_m$ (%СС)	0	-0,11	0	-2,324
Стандартное отклонение $c_m$	0,013	0,013	0,067	0,074
Среднее значение $c_n$ (%СС)	0	-0,06	0	-1,543
Стандартное отклонение $c_n$	0,011	0,011	0,012	0,012

\* Переменные усреднены по размеру популяции индивидуальных агентов и выражены в отклонениях от стационарного состояния (СС).

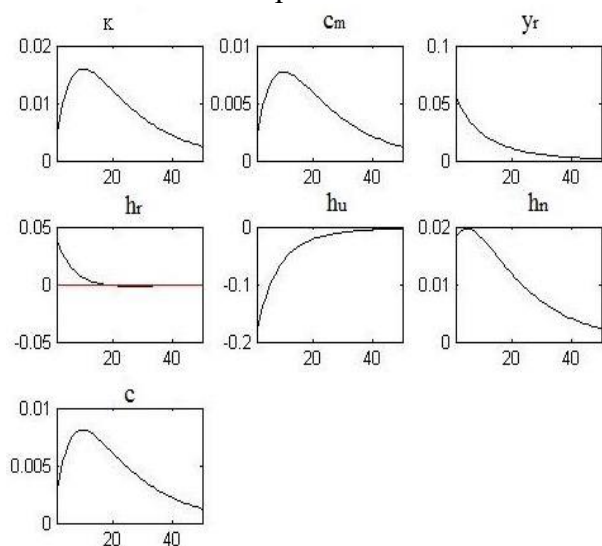
\*\* При аппроксимации функции распределения запасов капитала моментами первого порядка реализация моделей с репрезентативными и гетерогенными агентами осуществляется приближением первого порядка теории возмущений. Соответственно при аппроксимации моментами второго порядка – приближением второго порядка.

Одним из основных инструментов анализа DSGE-моделей является исследование поведения функций импульсного отклика. На рис. 1 показано влияние одномоментного положительного шока производительности в легальном секторе эконо-

мики на переменные исследуемой модели. Приведенные результаты, в принципе, являются ожидаемыми. Положительный шок производительности в легальном секторе экономики приводит к возрастанию всех основных показателей, в том числе повышению потребления для собственного конечного использования в секторе домашних хозяйств (переменная  $hn$ ). В то же время выпуск в теневом секторе экономики уменьшается (переменная  $hu$ ). При этом

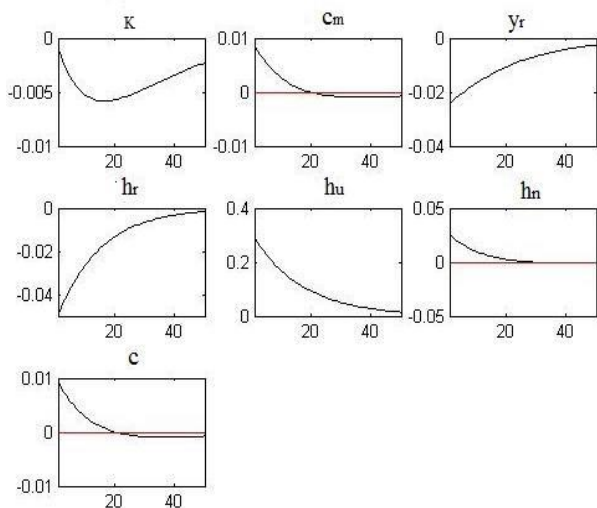
<sup>1</sup> Для модели с гетерогенными агентами генерировалась последовательность из 1000 идиосинкратических шоков (по числу агентов) длиной 10 000. Первые 1000 наблюдений удалялись для исключения зависимости от начальных условий.

следует отметить более высокую степень затухания отклика спроса на труд в легальном секторе экономики (переменная  $hr$ ) по сравнению с персистентностью отклика остальных переменных.



**Рис. 1.** Влияние положительного шока общефакторной производительности в легальном секторе экономики на переменные исследуемой модели\*

\* Параметры модели указаны в тексте и табл. 1. Величина шока равна одному стандартному отклонению.

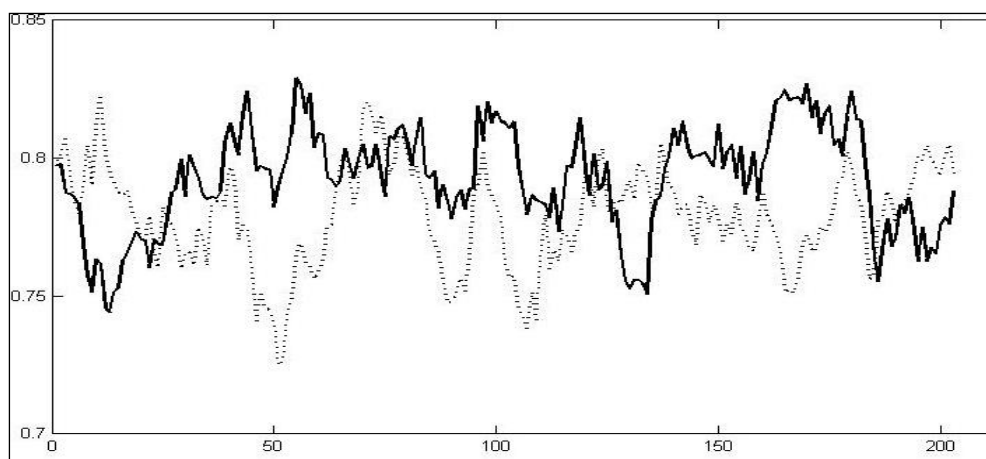


**Рис. 2.** Влияние положительного шока общефакторной производительности в теновом секторе экономики на переменные исследуемой модели\*

\* Параметры модели указаны в тексте и табл. 1. Величина шока равна одному стандартному отклонению.

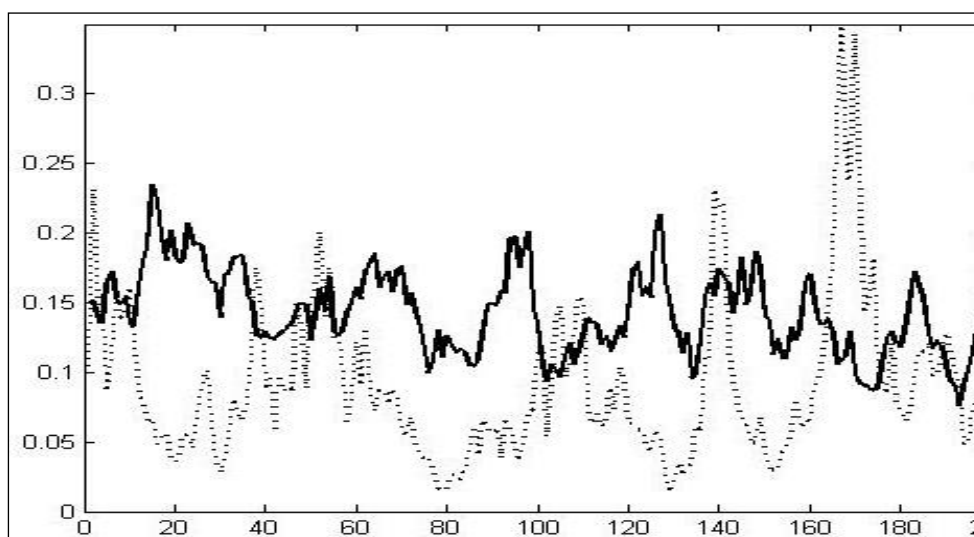
Положительный одномоментный шок производительности в теновом секторе экономики, напротив, приводит к возрастанию объема выпуска в этом секторе и к снижению спроса на труд в легальном секторе экономики (рис. 2). Объем выпуска в легальном секторе ( $y_r$ ) и запасы капитала ( $k$ ) также снижаются. При этом суммарный и рыночный уровни потребления возрастают. Уровень потребления домашних хозяйств, производящих блага для собственного потребления, также возрастает. Приведенные результаты свидетельствуют о позитивном влиянии (ниже определенного предела) теновых секторов (включая неформальный сектор экономики и сектор производства домохозяйств) на минимизацию темпов снижения экономических показателей во время рецессий, особенно для развивающихся экономик. Таким образом, теневая экономика является одним из факторов противодействия рецессии, так как деньги, зарабатываемые в теновом секторе, увеличивают потребительский спрос и занятость населения. Но негативным фактором полученного результата является уменьшение сбора налогов для финансирования госрасходов. Поэтому задачей государства является уменьшение влияния этих секторов на макроэкономику за счет увеличения позитивной роли легального сектора.

Интересно проанализировать влияние повышения налоговых ставок на динамику объема выпуска в легальном и теновом секторах экономики. На рис. 3 показано изменение динамики объема выпуска в легальном секторе экономики при повышении ставки корпоративного налога с прибыли на три процентных пункта. На рис. 4 приведено аналогичное изменение динамики объема выпуска в теновом секторе экономики. Результаты говорят сами за себя: объем выпуска в легальном секторе уменьшается, а в теновом возрастает. Исключение составляет период симуляций, который соответствует временному отрезку 2013–2015 гг. в статистических данных и приходится на период резкого спада экономики. Вероятнее всего эффект спада экономики превалирует над эффектом повышения налоговых ставок.



**Рис. 3.** Динамика объема выпуска (нормированного к суммарному объему выпуска) в легальном секторе экономики при значении ставки налога с прибыли корпораций 0,20 (сплошная линия) и 0,23 (точечная линия)\*

\* Остальные параметры модели указаны в тексте и табл. 1. По горизонтальной оси отложен период симуляций исследуемой модели.

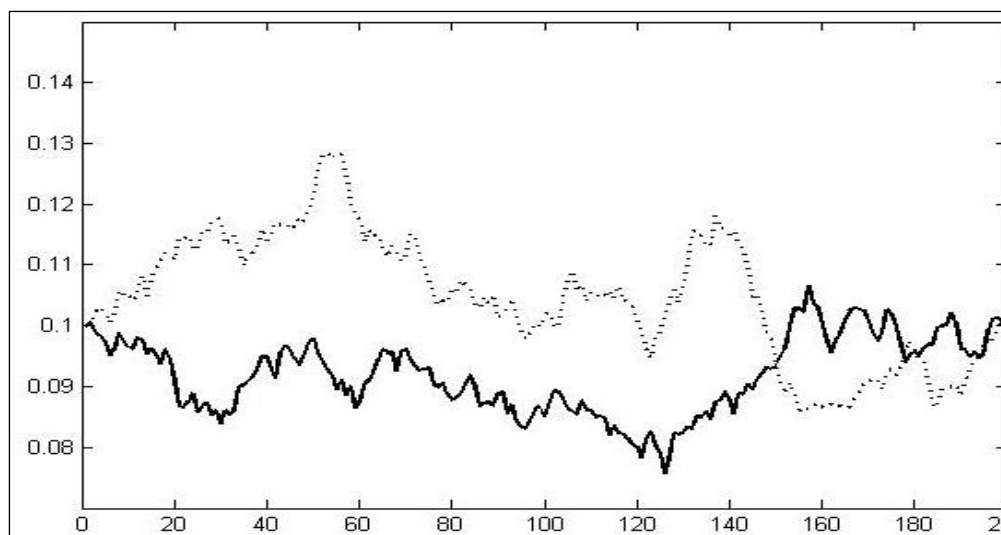


**Рис. 4.** Динамика объема выпуска (нормированного к суммарному объему выпуска) в теновом секторе экономики при значении ставки налога с прибыли корпораций 0,23 (сплошная линия) и 0,20 (точечная линия)\*

\* Остальные параметры модели указаны в тексте и табл. 1. По горизонтальной оси отложен период симуляций исследуемой модели.

На рис. 5 приведено изменение динамики объема выпуска в секторе домашних хозяйств, производящих блага для собственного потребления, при повышении ставки налога на доход физических лиц на пять процентных пунктов. Из приведенных результатов следует, что с увеличением налоговой ставки потребление домашних хозяйств, производящих собственные блага, увеличивается. Исключение, как и в предыдущем случае, составляет период симуляций, приходящийся на временной отрезок резкого спада экономи-

ки. Пока неясно, связано это со статистической ошибкой или, действительно, со снижением потребления собственных благ домашними хозяйствами. Отметим также, что изменение динамики объема выпуска в неформальном секторе экономики с изменением ставки налога на доход физических лиц аналогично тем же процессам, происходящим в секторе домашних хозяйств, что отражено на рис. 5. Поэтому отдельный график по неформальному сектору экономики не приводится.



**Рис. 5.** Динамика объема выпуска в секторе домашних хозяйств (нормированного к суммарному объему выпуска), производящих блага для собственного потребления, при значении ставки налога на доход физических лиц 0,13 (сплошная линия) и 0,18 (точечная линия)\*

\* Остальные параметры модели указаны в тексте и табл. 1. По горизонтальной оси отложен период симуляций исследуемой модели.

### Заключение

Представлены результаты исследования влияния теневого, неформального и сектора домашних хозяйств, производящих блага для собственного потребления, на макроэкономическую динамику в DSGE-модели. При этом применялся алгоритм аппроксимации динамики функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов – динамикой ее первого и второго моментов. Параметры модели при каждой итерации алгоритма оценивались с помощью метода Байеса на статистических данных российской экономики. Оригинальным результатом является установление необходимости учета не только моментов первого порядка функции распределения запасов капитала индивидуальных агентов, но и моментов второго

при анализе динамики агрегированных переменных. Поведение функций импульсного отклика основных переменных модели подтверждает факт позитивного влияния теневой экономики (ниже определенного предела) на минимизацию темпов снижения экономических показателей во время рецессий, особенно для развивающихся экономик. Также следует отметить, что неоднородность распределения запасов капитала среди агентов способствует повышению эластичности предложения труда в соответствующих секторах экономики.

Предлагаемая модель представляет интерес, как с методологической точки зрения, так и с практической – для анализа секторов экономики, не наблюдаемых прямыми статистическими методами.

### Список литературы

1. *Linde J.* DSGE models: Still useful in policy analysis? // *Oxford Review of Economic Policy*. 2018. Vol. 34. Iss. 1-2. P. 269–286.
2. *Rees D., Smith P., Hall J.* A Multi-sector model of the Australian economy // *Research Discussion Paper*. 2015. Vol. 7. 63 p.
3. *Costa S.M. de Azevedo* Structural trends and cycles in a DSGE model for Brazil // *Working Paper*. Banco Central do Brasil. 2016. № 434. P. 1–57.



4. *Valdivia D.* Handbook on DSGE models: some useful tips in modeling a DSGE models // MPRA Paper. 2015. № 61347. URL: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/61654/> (дата обращения: 18.06.2018).
5. *Малаховская О.А., Минабутдинов А.Р.* Динамическая стохастическая модель общего равновесия экспортноориентированной экономики. Препринт WP12/2013/04 / Высшая школа экономики. Москва, 2013. 33 с.
6. *Полбин А.В.* Построение динамической стохастической модели общего равновесия для экономики с высокой зависимостью от экспорта нефти // Экономический журнал ВШЭ. 2013. Том 17. № 2. С. 347–387.
7. *Шульгин А.Г.* Сколько правил монетарной политики необходимо при оценке DSGE – модели для России? // Прикладная эконометрика. 2014. №4 (36). С. 3–31.
8. *Андреев М.Ю., Поспелов И.Г.* Принцип рациональных ожиданий: Обзор концепций и примеры моделей. М.: ВЦ РАН, 2008. 79 с.
9. *Muth J.F.* Rational Expectations and the Theory of Price Movements // *Econometrica*. 1961. Vol. 29. № 3. P. 315–335.
10. *Giannitsarou C.* Heterogenous learning // *Review of Economic Dynamics*. 2003. Vol. 6. № 4. P. 885–906.
11. *Honkapohja S.* Bounded rationality in macroeconomics. A review essay // *Journal of Monetary Economics*. 1995. Vol. 35. № 3. P. 509–518.
12. *Серков Л.А., Елизаров Д.Б.* Моделирование ожиданий в системах с гетерогенными агентами при наличии теневого сектора экономики // Известия УрГЭУ. 2017. № 2 (70). С. 17–26.
13. *Krusell P., Smith A.* Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy // *Journal of Political Economy*. 1998. Vol. 106. № 5. P. 867–896.
14. *Maliar L., Maliar S., Valli F.* Solving the incomplete markets model with aggregate uncertainty using the Krusell–Smith algorithm // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2010. Vol. 34. № 1. P. 42–49.
15. *Den Haan W.J.* Solving Dynamics models with aggregate shocks and heterogeneous agents // *Macroeconomic Dynamics*. 1997. Vol. 1. Iss. 2. P. 355–386.
16. *Busato F., Chiarini B.* Steady state Laffer Curve with the underground economy // *Public Finance Review*. 2013. № 5. P. 608–632.
17. *Colombo E., Onnis L., Tirelli P.* Shadow economies at times of banking crises: Empirics and theory // *Journal of Banking and Finance*. 2016. № 62. P. 180–190. doi: 10.1016/j.jbankfin.2014.09.017.
18. *Reiter M.* Solving heterogeneous – Agent models by projection and perturbation // *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2009. Vol. 33. Iss. 3. P. 649–665.
19. *Aiyagari S.* Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving // *The Quarterly Journal of Economics*. 1994. Vol. 109. Iss. 3. P. 659–684.
20. *Поспелов И.Г.* Моделирование российской экономики в условиях кризиса // Вопросы экономики. 2009. № 11. С. 50–75.
21. *Geweke J.* Using simulation methods for Bayesian econometrics models: Inference, development and communication // *Econometric Reviews*. 1999. Vol. 18. № 1. P. 1–73.
22. *Benhabib J., Rogerson R., Wriht R.* Homework in macroeconomics: household production and aggregate fluctuations // *Journal of Political Economy*. 1991. Vol. 99. № 6. P. 1166–1187.
23. *King R., Plosser C.* Real business cycles: Introduction // *Journal of Monetary Economics*. 1988. Vol. 21. Iss. 2-3. P. 191–193.
24. *King R., Rebelo S.* Resuscitating real business cycles // NBER Working Paper. 2000. № 7534. URL: <http://www.nber.org/papers/w7534.pdf> (дата обращения: 18.06.2018).
25. *Крепцев Д., Селезнев С.* DSGE-модели российской экономики с малым количеством уравнений // Серия докладов об экономических исследованиях. Центральный банк Российской Федерации. 2016. № 12. URL: [https://www.cbr.ru/Content/Document/File/16728/wps\\_12.pdf](https://www.cbr.ru/Content/Document/File/16728/wps_12.pdf) (дата обращения: 18.06.2018).

## Сведения об авторе

Серков Леонид Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, Институт экономики УрО РАН (Россия, 620014, г. Екатеринбург, ул. Московская, 29; e-mail: dsge2012@mail.ru).

## References

1. Linde J. DSGE models: Still useful in policy analysis? *Oxford Review of Economic Policy*, 2018, vol. 34, iss. 1-2, pp. 269–286.
2. Rees D., Smith P., Hall J. A Multi-sector model of the Australian economy. *Research Discussion Paper*, 2015, vol. 7. 63 p.
3. Costa S.M. de Azevedo Structural trends and cycles in a DSGE model for Brazil. *Working Paper*. Banco Central do Brasil, 2016, no. 434, pp. 1–57.
4. Valdivia D. Handbook on DSGE models: Some useful tips in modeling a DSGE models // *Munich Personal RePEc Archive Paper*, 2015, no. 61347. Available at: <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/61654/> (accessed 18.06.2018).
5. Malakhovskaya O.A., Minabutdinov A.R. Dinamicheskaya stokhasticheskaya model' obshchego ravnesiya eksportnoorientirovannoi ekonomiki [Dynamic stochastic model of general equilibrium of export oriented economy]. *Preprint WP12/2013/04* [Preprint WP12/2013/04]. Moscow, Vysshaya shkola ekonomiki Publ., 2013. 33 p. (In Russian).
6. Polbin A.V. Postroenie dinamicheskoi stokhasticheskoi modeli obshchego ravnesiya dlya ekonomiki s vysokoi zavisimost'yu ot eksporta nefi [Development of a dynamic stochastic general equilibrium model for an economy with high dependence on oil export]. *Ekonomicheskii zhurnal VShE* [Higher School of Economics Economic Journal], 2013, vol. 17, no. 2, pp. 347–387. (In Russian).
7. Shul'gin A.G. Skol'ko pravil monetarnoi politiki neobkhodimo pri otsenke DSGE – modeli dlya Rossii? [How much monetary policy rules do we need to estimate DSGE model for Russia]. *Prikladnaya ekonometrika* [Applied Econometrics], 2014, no. 4 (36), pp.3–31. (In Russian).
8. Andreev M.Yu., Pospelov I.G. *Printsip ratsional'nykh ozhidanii: Obzor kontseptsii i primery modelei* [Rational expectation principle: Review of concepts and model examples]. Moscow, VTs RAN Publ., 2008. 79 p. (In Russian).
9. Muth J.F. Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, 1961, vol. 29, no. 3, pp. 315–335.
10. Giannitsarou C. Heterogeneous learning. *Review of Economic Dynamics*, 2003, vol. 6, no. 4, pp. 885–906.
11. Honkapohja S. Bounded rationality in macroeconomics. A review essay. *Journal of Monetary Economics*, 1995, vol. 35, no. 3, pp. 509–518.
12. Serkov L.A., Elizarov D.B. Modelirovanie ozhidanii v sistemakh s geterogennymi agentami pri nalichii tenevogo sektora ekonomiki [Modelling of expectations in the system with heterogeneous agents in the presence of shadow economy]. *Izvestiya UrGEU* [Journal of the Ural State University of Economics], 2017, no. 2 (70), pp. 17–26. (In Russian).
13. Krusell P., Smith A. Income and wealth heterogeneity in the macroeconomy. *Journal of Political Economy*, 1998, vol. 106, no. 5, pp. 867–896.
14. Maliar L., Maliar S., Valli F. Solving the incomplete markets model with aggregate uncertainty using the Krusell–Smith algorithm. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 42–49.
15. Den Haan W.J. Solving dynamics models with aggregate shocks and heterogeneous agents. *Macroeconomic Dynamics*, 1997, vol. 1, iss. 2, pp. 355–386.
16. Busato F., Chiarini B. Steady state Laffer curve with the underground economy. *Public Finance Review*, 2013, no. 5, pp. 608–632.
17. Colombo E., Onnis L., Tirelli P. Shadow economies at times of banking crises: Empirics and theory. *Journal of Banking & Finance*, 2016, no. 62, pp.180–190. doi: 10.1016/j.jbankfin.2014.09.017.
18. Reiter M. Solving heterogeneous – Agent models by projection and perturbation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 2009, vol. 33, iss. 3 pp. 649–665.
19. Aiyagari S. Uninsured idiosyncratic risk and aggregate saving. *The Quarterly Journal of Economics*, 1994, vol. 109, iss. 3, pp. 659–684.

20. Pospelov I.G. Modelirovanie rossiiskoi ekonomiki v usloviyakh krizisa [Russian economy modelling in crisis conditions]. *Voprosy ekonomiki* [Economics Issues], 2009, no. 11, pp. 50–75. (In Russian).
21. Geweke J. Using simulation methods for Bayesian econometrics models: Inference, development and communication. *Econometric Reviews*, 1999, vol. 18, no. 1, pp. 1–73.
22. Benhabib J., Rogerson R., Wriht R. Homework in macroeconomics: household production and aggregate fluctuations. *Journal of Political Economy*, 1991, vol. 99, no. 6, pp. 1166–1187.
23. King R., Plosser C. Real business cycles: Introduction. *Journal of Monetary Economics*, 1988, vol. 21, iss. 2-3, pp. 191–193.
24. King R., Rebelo S. Resuscitating real business cycles. *NBER Working Paper*, 2000, no. 7534. Available at: <http://www.nber.org/papers/w7534.pdf> (accessed 18.06.2018).
25. Kreptsev D., Seleznev S. DSGE – modeli rossiiskoi ekonomiki s malym kolichestvom uravnenii [DSGE models of Russian economy with a small number of equations]. *Seriya dokladov ob ekonomicheskikh issledovaniyakh. Tsentral'nyi bank Rossiiskoi Federatsii* [Series of reports about economic studies. Central Bank of the Russian Federation], 2016, no. 12. (In Russian). Available at: [https://www.cbr.ru/Content/Document/File/16728/wps\\_12.pdf](https://www.cbr.ru/Content/Document/File/16728/wps_12.pdf) (accessed 18.06.2018).

*The date of the manuscript receipt: 30.04.2018*

#### **Information about the Author**

Serkov Leonid Aleksandrovich – Candidate of Physics and Mathematical Science, Associate Professor, Senior Researcher, Institute of Economics, the Ural branch of the Russian Academy of Sciences (29, Moskovskaya st., Ekaterinburg, 620014, Russia; e-mail: [dsge2012@mail.ru](mailto:dsge2012@mail.ru)).

#### **Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:**

*Серков Л.А. Влияние теневого сектора экономики на поведение гетерогенных агентов // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2018. Том 13. № 2. С. 177–195. doi: 10.17072/1994-9960-2018-2-177-195*

#### **Please cite this article in English as:**

Serkov L.A. Influence of a shadow sector of economy on heterogeneous agent behavior. *Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy*, 2018, vol. 13, no. 2, pp. 177–195. doi: 10.17072/1994-9960-2018-2-177-195