

doi 10.17072/1994-9960-2018-3-390-401

УДК 330.4(470.53)

ББК 65в6

JEL Code J170, R500

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ОБЩЕСТВА НА ПРИМЕРЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ДАННЫХ ПО ПЕРМСКОМУ КРАЮ

Владимир Павлович ПервадчукORCID ID: [0000-0001-6770-6292](https://orcid.org/0000-0001-6770-6292), Researcher ID: [I-4476-2018](https://orcid.org/I-4476-2018)Электронный адрес: pervadchuk@mail.ruПермский национальный исследовательский политехнический университет
614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29**Дарья Борисовна Владимирова**ORCID ID: [0000-0001-8691-9883](https://orcid.org/0000-0001-8691-9883), Researcher ID: [I-4484-2018](https://orcid.org/I-4484-2018)Пермский национальный исследовательский политехнический университет
614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29**Полина Олеговна Деревянкина**ORCID ID: [0000-0001-8814-5324](https://orcid.org/0000-0001-8814-5324), Researcher ID: [H-1718-2018](https://orcid.org/H-1718-2018)Электронный адрес: p.derevyankina@bk.ruПермский национальный исследовательский политехнический университет
614990, Россия, г. Пермь, Комсомольский пр., 29

Денежные накопления населения служат предметом исследования многих специалистов, поскольку их подробное изучение в совокупности с другими экономическими переменными позволяет проводить качественный анализ сложившейся в экономике и социальной сфере общества ситуации и делать прогнозы. Определение такой экономической характеристики общества, как распределение населения по денежным накоплениям, на практике является весьма нетривиальной задачей из-за дефицита достоверной информации по накоплениям граждан. Зачастую вместо распределенной величины используется постоянный показатель – средний уровень накоплений домохозяйств. В случае когда накопления в обществе распределяются по нормальному закону (как в развитых странах), замена распределенной величины постоянной для упрощения задач возможна. В работе показано, что для Пермского края структура накоплений общества бимодальна, т. е. существенно отличается от нормального закона распределения, и поэтому заменять ее постоянной величиной с математической точки зрения неприемлемо, а необходимо учитывать именно как распределенную. Этим обеспечивается актуальность настоящего исследования, целью которого является определение и анализ численных характеристик экономической структуры общества Пермского края. Основная идея работы заключается в применении математической модели спектра накоплений общества Д.С. Чернавского для Пермского края, численном расчете модели и экономическом анализе полученных характеристик. Подобных числовых расчетов распределения населения Пермского края по накоплениям, основанных на официальной статистике, ранее не проводилось. Применяются методы экономического анализа, математического и компьютерного моделирования, методы теорий обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальных уравнений в частных производных и стохастических дифференциальных уравнений, теории вероятности и математической статистики. Проведено численное исследование математической модели экономической структуры общества Пермского края, рассчитаны наиболее вероятные стационарные уровни накоплений населения Пермского края, которые приблизительно составили 10 и 63 прожиточных минимумов на 2016 г. Семьи условно концентрируются в окрестностях этих значений, подобно элементарным частицам при броуновском движении (Это сравнение неслучайно, так как оба процесса описываются стохастическим дифференциальным уравнением Фоккера – Планка в частных производных параболического типа.) Стационарные уровни накоплений численно характеризуют стандарты потребления и уровня жизни населения и формируются исходя из стоимости потребительской корзины. В перспективе планируется проведение исследований по оптимальному управлению экономической структурой общества.

Ключевые слова: экономическая структура общества, распределение населения по накоплениям, стационарные уровни накоплений, спектр накоплений, экономические группы населения, неравенство по доходам, расслоение общества, уравнение Фоккера – Планка, уравнение денежного баланса, математическая модель Д.С. Чернавского.



MATHEMATICAL MODELING OF ECONOMIC SOCIETY STRUCTURE IN THE CASE STUDY OF THE PERM REGION STATISTICAL DATA

Vladimir P. Pervadchuk

ORCID ID: [0000-0001-6770-6292](https://orcid.org/0000-0001-6770-6292), Researcher ID: [I-4476-2018](https://orcid.org/I-4476-2018)

E-mail: pervadchuk@mail.ru

Perm National Research Polytechnic University
29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia

Dar'ya B. Vladimirova

ORCID ID: [0000-0001-8691-9883](https://orcid.org/0000-0001-8691-9883), Researcher ID: [I-4484-2018](https://orcid.org/I-4484-2018)

Perm National Research Polytechnic University

29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia

Polina O. Derevyankina

ORCID ID: [0000-0001-8814-5324](https://orcid.org/0000-0001-8814-5324), Researcher ID: [H-1718-2018](https://orcid.org/H-1718-2018)

E-mail: p.derevyankina@bk.ru

Perm National Research Polytechnic University
29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia

Monetary savings of the population are the subject of research of many specialists, since their detailed study in total with other various economic variables allows for a qualitative analysis of the current social and financial situation and make predictions. The definition of such an economic characteristic of society as the distribution of the population by money savings in practice is a very non-trivial task because of the lack of reliable information on the accumulation of citizens. Often, rather than a distributed value, a constant indicator is used – the average level of household savings. In the case when the savings are distributed according to the normal law in society (as in the developed countries), the replacement of the distributed quantity by a constant is possible to simplify the tasks. It is shown that Perm krai has bimodal structure of society savings, what essentially differs from the normal distribution law and therefore from the mathematical point of view it is unacceptable to replace one with a constant value, but it is necessary to take it into account as a distributed one. This ensures the relevance of this study, whose goal is to identify and analyze the numerical characteristics of the economic structure of Perm krai. The main idea of the work is to apply the mathematical model of the accumulation spectrum of the society of D.S. Chernavskii for Perm krai, the numerical calculation of the model and the economic analysis of the obtained characteristics. Similar numerical calculations of the distribution of the population of Perm krai on savings based on official statistics have not been conducted previously. Methods of economic analysis, mathematical and computer modeling, methods of theories of ordinary differential equations, partial differential equations and stochastic differential equations, probability theory and mathematical statistics are applied. A numerical study of the mathematical model of Perm krai economic society structure was carried out, the most probable stationary levels of population savings in Perm krai were calculated, which approximately amounted to 10 and 63 subsistence minimums for 2016 year. Families seem to accumulate in the vicinity of these savings values, like elementary particles under Brownian motion (this is not a coincidence, since both processes are described by the stochastic differential Fokker-Planck equation in partial derivatives of the parabolic type). Stationary savings levels numerically characterize the consumption standards and the standard of living of a society and are formed on the basis of the value of the consumer basket. In future, it is planned to conduct research on the optimal control of the economic structure of society.

Keywords: the economic society structure, population distribution density by savings, stationary levels of savings, spectrum of the savings, savings in the Perm Region, economic groups of the population, social stratification, Fokker – Planck equation, money balance equation, mathematical model of D.S. Chernavskii.

Введение

Под экономической структурой общества (ЭСО) вслед за Д.С. Чернавским будем понимать распределение элементов общества по ликвидным накоплениям [1].

Накопления населения относятся к группе синтетических показателей уровня жизни – важнейшей итоговой характеристике взаимодействующих социальных процессов. Расчеты ЭСО представляют большой практический интерес для анализа матери-

ального положения населения, характеристики степени расслоения общества по имущественному состоянию [2]. Также информация о распределении накоплений может использоваться в вопросах определения оптимальной системы налогообложения, ценообразования, адресной безынфляционной эмиссии денег [3–4], формирования банковской политики и в целом макроэкономической политики государства или региона [5–6].

ЭСО в развитых странах можно получить с помощью анализа структуры рынка вкладов в банках [7–9]. Основная причина невозможности применения такого подхода в России кроется в том, что накопления населения преимущественно находятся в неорганизованном виде [10]. С помощью социологических опросов была получена приблизительная оценка количества граждан, имеющих вклады в банках, согласно которой срочные вклады от 10 тыс. руб. принадлежат 25 млн человек, что составляет 17% населения, и на них приходится 99% всех вкладов [11]. Кроме того, в нашей стране информацией по вкладам владеет только агентство по страхованию вкладов (АСВ). При этом оно собирает с банков отчетность по суммам вкладов, а не по вкладчикам. Отметим также, что в понятие «вклады» включаются депозитные сертификаты, средства на разных счетах, в том числе «карточных» и т.д. Понятно, что у одного и того же человека могут быть и минимальные, и средние, и максимальные остатки на счетах одновременно. Следовательно, даже имея статистику по вкладам АСВ, перейти к структуре игроков рынка вкладов представляется весьма нетривиальной задачей. Важный нюанс состоит еще и в том, что почти половина всех вкладов нашей страны принадлежит 1% населения [11]. В силу вышеперечисленных факторов информация по вкладам в России не может отражать действительные накопления каждого слоя общества.

Конечно, для построения ЭСО можно воспользоваться социологическим методом – провести опрос населения. Но опрос зачастую дает искаженную информацию (здесь мы неизбежно столкнемся со

сложностью составления репрезентативной выборки – вспомнить хотя бы 1% населения, формирующий половину рынка вкладов), моментную (состояние на день опроса) и является весьма трудоемким.

Метод же математического моделирования ЭСО на основе косвенных данных не только может обеспечить получение результатов, более адекватно отражающих существующие реалии, но и позволит рассчитывать ЭСО при различных значениях параметров модели, а также проследить динамику изменения ЭСО и делать прогнозы. Преимущества метода математического моделирования ЭСО трудно переоценить для проведения качественного анализа сложившейся экономической ситуации и возможных сценариев ее развития.

Таким образом, в сложившихся условиях получение достоверных численных оценок ЭСО является востребованной и в то же время непростой экономической задачей.

Отметим также, что сам термин экономической структуры общества (ЭСО) ввел Д.С. Чернавский, который впервые построил математическую модель спектра накоплений общества и исследовал ее поведение при различных управляющих воздействиях [3, 12–13]. Далее специалистами были поставлены смешанные задачи для денежных и материальных накоплений и рассмотрены вероятностные характеристики¹. Группа ученых также занималась вопросами применения спектральных методов к задачам денежных и материальных накоплений [14–15].

В настоящем исследовании рассмотрим модельную задачу – построим модифицированную модель ЭСО на примере статистических данных по Пермскому краю за 2016 г. Предположим, что экономическая структура общества Пермского края качественно будет повторять структуру Российского общества [4], но количественные оценки будут отражать

¹ Ерофеев В.Т., Козловская И.С. Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. М.: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.

специфику Пермского края и уровень жизни в нем.

В статистическом ежегодном сборнике Пермского края публикуется распределение населения по общим среднедушевым денежным доходам. В соответствии с действующей методологией (утв. постановлением Госкомстата России от 16 июля 1996 г. № 61) общий объем денежных доходов определяется на основе суммы отдельных компонентов: учитываются данные об объемах начисленной заработной платы и выплатах социального характера наемным работникам, доходов от предпринимательской деятельности и собственности, социальных выплат (в виде пенсий, пособий, стипендий и иных мер социальной поддержки), формируемых на основе данных официальной статистической отчетности организаций, осуществляющих выплаты населению¹. Учитывая этот факт, упростим модель: будем отталкиваться от общего среднедушевого денежного дохода, не дифференцируя его по видам.

Приведем описание модифицированной в [16] математической модели ЭСО с учетом вышеизложенных допущений.

Модифицированная математическая модель ЭСО Д.С. Чернавского

Динамическая модель семейного баланса описывается обыкновенным дифференциальным уравнением $\frac{dx}{dt} = P(x, t) - R(x, t)$, (1)

где x – сумма накопленных денег в семье (отрицательное значение функции $x(t)$ будем интерпретировать как долг), $P(x, t)$ – доходы семьи, $\left([P] = \frac{py\bar{b}}{\text{мес}}\right)$, $R(x, t)$ – расходы семьи $\left([R] = \frac{py\bar{b}}{\text{мес}}\right)$. Последние представимы в виде суммы 4 видов:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + R_4. \quad (2)$$

Жизненно необходимые повседневные расходы R_1 определяются выражением

$$R_1(x) = C \frac{x}{x + x_0}, \quad (3)$$

где C – прожиточный минимум; x_0 – величина накоплений, обеспечивающая благополучное существование. Повседневные расходы R_2 , обеспечивающие благополучие семьи, задаются формулой

$$R_2(x) = Bx\Theta(x, x_1), \quad (4)$$

где B – предельная максимально допустимая доля R_2 в общем объеме накоплений; x_1 – примерный уровень накоплений, при котором семья может позволить себе осуществление R_2 ; $\Theta(x, x_1)$ – логистическая кривая, определяющая возможность осуществления R_2 . В модели используется

$$\Theta(x, x_1) = \frac{x^8}{x^8 + x_1^8}. \quad (5)$$

Рисковые расходы R_3 представимы в виде

$$R_3(x) = Ax\Theta(x, x_2), \quad (6)$$

где A – склонность к предпринимательской деятельности, x_2 – минимальный уровень накоплений для возможного осуществления R_3 . Расходы на уплату налогов

R_4 качественно описываются как $R_4(x) = k\tilde{P}\Theta(\tilde{P}, C)$, (7)

где k – коэффициент предельного налогообложения, \tilde{P} – налогооблагаемый доход: $\tilde{P} = P - R_3$. (8)

Для математического описания того факта, что в реальности семья, помимо гарантированных, может иметь случайные доходы и расходы (выигрыш в лотерею, расходы в связи с болезнью), добавим выражение $g\zeta(t)$ в правую часть уравнения накоплений (1), означающее общее количество денег, которое семья к моменту времени t накопит из случайных источников. $\zeta(t)$ – случайная функция, распределенная согласно нормальному закону со средним значением 0 и дисперсией, равной 1; g – амплитуда шума.

С учетом структуры расходов (2)–(8) и случайных факторов уравнение (1)

¹ Методология расчета распределения и дифференциации денежных доходов населения // Федеральная служба государственной статистики. URL: www.gks.ru/free_doc/new_site/population/bednost/glos/m1-2-1.doc (дата обращения: 19.04.2018).

примет вид

$$\frac{dx}{dt} = (1 - k\theta(\tilde{P}, C))\tilde{P} - C \frac{x}{x+x_0} - Bx\theta(x, x_1) + g\zeta(t), \quad (9)$$

$$\tilde{P} = P - Ax\theta(x, x_2). \quad (10)$$

Перейдем к безразмерной форме уравнения (9) с помощью преобразований $x^* = x/x_0$, $t^* = t/t_0$ (время $t_0 = x_0/C$ харак-

терно для оборота денег в семье) и сохраним для удобства старые обозначения переменных и коэффициентов. Таким образом, получим модифицированное динамическое уравнение типологии семейных накоплений в безразмерной форме:

$$\frac{dx}{dt} = (1 - k\theta(\tilde{P}, 1))\tilde{P} - \frac{x}{x+1} - Bx\theta(x, x_1) + g\zeta(t), \quad (11)$$

$$\tilde{P} = P - Ax\theta(x, x_2). \quad (12)$$

Перепишем (11) в характерном для уравнений Ланжевена виде, выделяя в правой части детерминированную и случайную компоненты:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + G(x, \zeta), \quad (13)$$

$$\text{Где } F(x) = (1 - k\theta(\tilde{P}, 1))\tilde{P} - \frac{x}{x+1} - Bx\theta(x, x_1),$$

$$G(x, \zeta) = g\zeta(t). \quad (14)$$

Уравнение (13) – стохастическое дифференциальное уравнение. Марковский процесс первого порядка $x(t)$ полностью определяется плотностью вероятности $\rho(x, t)$, которая подчиняется уравнению Фоккера – Планка [17]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(F(x) \cdot \rho) + \frac{g^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rho. \quad (15)$$

Уравнение (15) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных параболического типа. Первоначально уравнения Фоккера – Планка применялись в основном в физике для изучения поведения броуновских частиц.

В нашем случае в качестве элементарных частиц выступают семьи, а плотность распределения $\rho(x, t)$ означает долю тех семей в общей выборке, накопления которых находятся в пределах от x до $x + \Delta x$. Размерность функции плотности распределения $[\rho] = \frac{1}{руб}$.

За «коэффициентами» $F(x)$ и g^2 исторически закрепились названия коэф-

фициентов сноса и диффузии соответственно. Первый характеризует среднее значение локальной скорости, а второй – локальную скорость изменения дисперсии приращения марковского процесса [18].

Определив все коэффициенты модели, перейдем к ее непосредственному численному расчету.

Численная реализация модели ЭСО на примере статистической выборки по Пермскому краю

Согласно имеющейся статистике по Пермскому краю за 2016 г. выделим четыре экономические группы по уровню среднедушевого среднемесячного дохода:

– бедные (с доходом менее 1,04 прожиточного минимума), их доля в общем объеме населения Пермского края составляет 16,1%;

– малообеспеченные (с доходом 1,04–1,98 прожиточных минимумов), их доля в выборке составляет 27,7%;

– обеспеченные (с доходом 1,98–4,69 прожиточных минимумов), их доля составляет 39,5%;

– богатые (с доходом 4,69–20 прожиточных минимумов), их доля составляет 16,6%.

По аналогии с [3] и преимущественно методом экспертных оценок определим параметры модели.

Величина накоплений, обеспечивающая полублагополучное существование, составляет $x_0 = 9591$ руб. (прожиточный минимум по Пермскому краю в 2016 г.). Период кругооборота денег в семье (t_0) составляет один месяц.

При достаточных накоплениях семья начинает приобретать товары, которые уже не являются товарами первой необходимости, а относятся к категории элитарных товаров (видеотехника, автомобиль, дача). Минимальный уровень этих накоплений определим как 10 прожиточных минимумов: $x_1 = 10 \cdot 9591 = 95910$ руб., или, в безразмерном виде, $x_1 = 10$. Согласно модели эта величина соответствует цене самого дешевого элитарного товара. За среднюю цену элитарного товара примем

$x_2 = 40 \cdot 9591 = 383640$ руб. (в безразмерном виде $x_2 = 40$).

Коэффициент предельного налогообложения k задан как 0,35.

Коэффициент A соответствует безрисковым вложениям в Сбербанке. Он равен 0,015.

Параметр B принят равным 0,1. Это означает, что на улучшение своего благополучия люди готовы отдать 10% накоплений.

Коэффициент g , отражающий величину случайных потерь или приобретений, задавался в интервале от 3 до 5,8.

Численное исследование модели проводилось в системе *COMSOL Multiphysics* 4.2.

Для каждой экономической группы решалась задача на промежутке $[L1;L2]$ (табл. 1). В качестве начального условия было взято известное из официальной статистики распределение населения по среднедушевым доходам (было сделано допущение об отсутствии расходов в начальный момент времени). Граничные условия задавались экспертными оценками, исходя из данных ВЦИОМ: в 2016 г. 39% респондентов сообщили, что у них нет накоплений¹). В табл. 1 приведем использованные для расчета модели значения параметров задачи, различающиеся в зависимости от экономической группы.

Таблица 1

Различающиеся числовые значения параметров задачи для каждой экономической группы

Экономическая группа	Граница L2		Начальные условия $\rho(x,0)$	Граничные условия	
	L1	L2		$\rho(L1,t)$	$\rho(L2,t)$
Бедные	0	31,28	0,161	0,500000	0,000002
Малообеспеченные	0	41,71	0,277	0,400000	0,000069
Обеспеченные	0	62,56	0,395	0,150000	0,000096
Богатые	0	135,54	0,166	0,000572	0,001143

ЭСО Пермского края, как и любого региона России, в условиях рыночной экономики формировалась с 1990-х гг., поэтому для 2016 г. примем ее стационарной.

Приведем результаты численного моделирования.

На рис. 1–4 приведены графики функции плотности распределения населения ρ для каждой выделенной экономической группы. Видно, что с увеличением дохода, максимум накоплений движется вправо. Этот результат не вызывает сомнений: более обеспеченные слои населения имеют больше возможностей сберегать свои средства, так как на удовлетворение жизненно необходимых потребностей уходит малая доля их дохода.

Для кластера бедных семей характерен стационарный уровень накоплений в 2,37 прожиточных минимумов (рис. 1), для кластера малообеспеченных семей – 8,22 прожиточных минимумов (рис. 2), класте-

ра обеспеченных семей – 13,76 прожиточных минимумов (рис. 3) и, наконец, кластера богатых – 64,21 прожиточных минимумов (рис. 4).

Под стационарным уровнем накоплений, по сути, подразумевается наиболее вероятный уровень накоплений в каждой экономической группе. В процессе установления стационарного состояния в своей группе одни семьи могут больше других тратить, другие – больше экономить, однако так или иначе они в итоге приходят к единому уровню накоплений в своем кластере. Таким образом, сложившаяся экономическая среда как бы подталкивает людей одного кластера скапливаться в районе примерно одинакового уровня накоплений.

¹ Сбережения и курс доллара: мониторинг // ВЦИОМ. № 3508. 7 нояб. 2017 г. URL: <https://wciom.ru/index.php?id=236&uid=116507> (дата обращения: 12.08.2018).

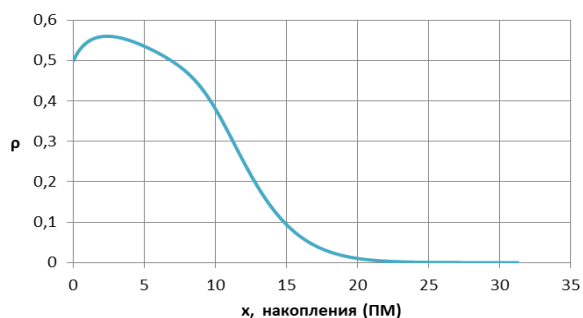


Рис. 1. Стационарное распределение по накоплениям для кластера бедных семей

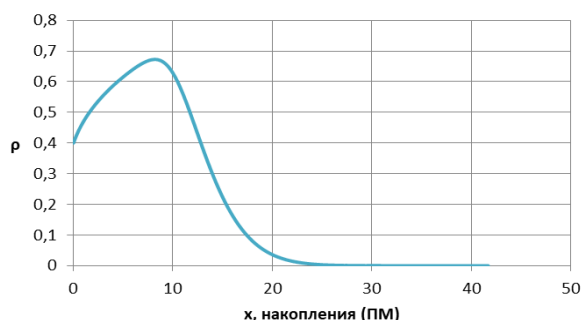


Рис. 2. Стационарное распределение по накоплениям для кластера малообеспеченных семей

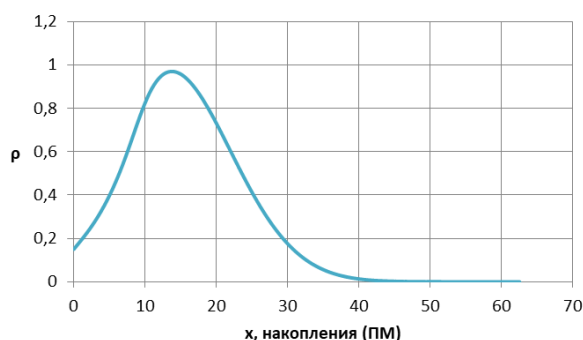


Рис. 3. Стационарное распределение по накоплениям для кластера обеспеченных семей

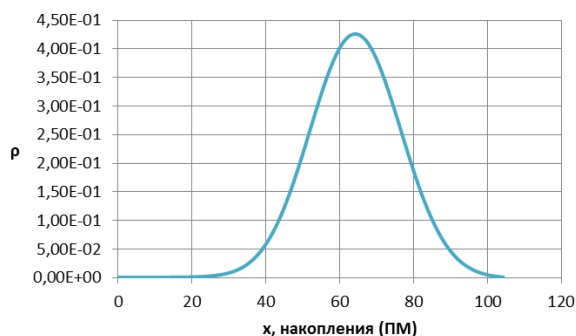


Рис. 4. Стационарное распределение по накоплениям для кластера богатых семей

Интерес представляет также общее стационарное распределение накоплений для всего населения Пермского края. Чтобы его получить, просуммируем значения функций плотностей распределения с весовыми коэффициентами, соответствующими доле каждой экономической группы в общей выборочной совокупности. Полученное суммарное стационарное распределение накоплений приведено на рис. 5. По графику видно, что функция суммарного стационарного распределения накоплений имеет два максимума: при $x = 10.3$ и $x = 63.5$ прожиточных минимумов.

Прежде всего отметим, что ЭСО Пермского края бимодальна, т.е. имеет два максимума. Такая особенность распределения присуща России в целом и унаследована со времен СССР [3].

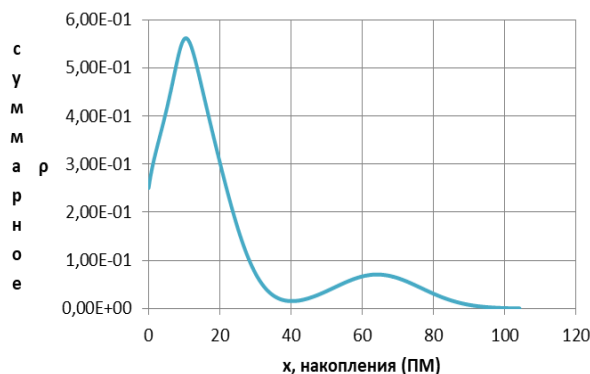


Рис. 5. Суммарное стационарное распределение по накоплениям для всего населения

В развитых странах эта структура унимодальна, и горб соответствует среднему классу общества (рис. 6).

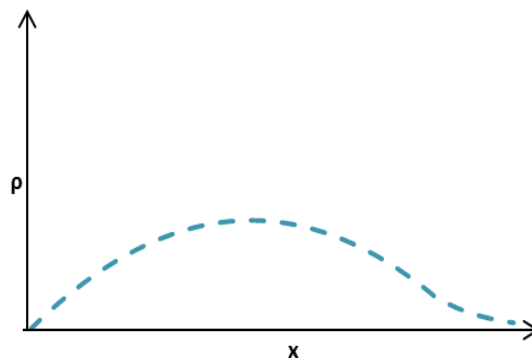


Рис. 6. Распределение по ликвидным накоплениям в Японии [4]

Таким образом, можно утверждать, что в обществе Пермского края средний класс практически отсутствует и все общество условно делится на две неравные группы. Первую группу составляет 83,4% населения Пермского края, и им принадлежит примерно 40% всех накоплений. Ко второй группе, «элите», можно отнести 16,6% населения, которые обладают 60% всех накоплений. По графику также видно, что эти экономические группы достаточно раздвинуты по оси накоплений, так что аргументы максимумов отличаются примерно в 6,15 раза. Эти цифры также говорят о высокой концентрации сбережений у малочисленной «богатой» части общества.

Отметим для сравнения, что в СССР до реформ (1987 г.) 85% всего населения владели 20% всех накоплений, а на долю оставшихся 15% приходилось 80% всех накоплений, и отношение аргументов максимумов составляло 70 [3]. Возможно, разрыв в накоплениях бедной и богатой групп общества был намного существеннее, поскольку под «богатыми» понималась самая верхушка общества СССР. Мы же в своем исследовании ограничились рассмотрением «богатых», чей доход не превышал 20 прожиточных минимумов, и отсекали самые верхние слои, по величине доходов которых у нас нет достоверной информации. Рассуждая дальше, можно предположить, что горб «бедных», существовавший в СССР, в нашем обществе разделился на 2 горба, и в состав второго горба «богатых» входят топ-менеджмент и активные предприниматели, которые смогли в условиях рыночной экономики преумножить свои сбережения.

В целом полученное распределение по накоплениям вполне соответствует распределению по доходам, публикуемому ежегодно в официальных источниках, согласно которому 20% населения с максимальными доходами распределяют между собой 47,1% всех доходов общества Пермского края, и более наглядно демонстрирует факт расслоения общества на «богатых» и «бедных».

Заключение

В работе была численно исследована математическая модель экономической структуры общества Пермского края. Полученные результаты говорят о ее бимодальности. Наиболее вероятные уровни накоплений жителей Пермского края составляют примерно 10 и 63 прожиточных минимумов.

В таких случаях, когда ЭСО существенно отличается по своей структуре от нормального распределения, заменять ее средним значением в различных экономических расчетах с математической точки зрения является недопустимым, поскольку это приводит к получению заведомо некорректных результатов. Кроме того, в периоды экономических кризисов распределение по накоплениям является нестационарным и может значительно отличаться от докризисной устоявшейся структуры.

В силу этих обстоятельств, а также учитывая условия дефицита достоверной информации о спектре накоплений общества, его математическое моделирование может быть очень востребованным.

Отметим, что в целом последние несколько десятков лет математическое моделирование социально-экономических процессов с учетом их стохастических составляющих бурно и успешно развивается во всем мире и нашей стране [19–23]. Возможность применения математического аппарата к таким сложным явлениям связана с простой закономерностью, вытекающей из закона больших чисел: непредсказуемость поведения отдельных элементов (в нашем случае семей) больше, чем их однородной группы, и, наоборот, она уменьшается по мере роста численности этой однородной совокупности.

Анализ ЭСО может быть интересен государственным структурам и различным организациям, предоставляющим финансовые услуги населению, для выработки обоснованных управленческих решений в области накоплений населения, в оценке уровня жизни и других экономических переменных. Отметим, что перспективным направлением развития математического моделирования ЭСО, которое может при-

нести еще большую практическую значимость, является исследование задач оптимального управления спектром накопле-

ний общества [24] с помощью методологии, описанной в исследовании А.В. Фурсикова [25].

Список литературы

1. Чернавский Д.С., Пирогов Г.Г. и др. Динамика экономической структуры общества // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1996. Т.4, № 3. С.67–75.
2. Игонина Л.Л. Инвестиционная значимость сбережений населения в Российской экономике // Дайджест-Финансы. 2017. Т. 22, вып. 1 (241). С. 4–18.
3. Чернавский Д.С., Попков Ю.С., Рахимов А.Х. Математические модели типологии семейных накоплений // Экономика и математические методы. 1994. Т. 30, вып. 2. С. 98–106.
4. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // Успехи физических наук. 2002. № 9 (172). doi: 10.3367/UFNr.0172.200209с.1045.
5. Иванов Ю.Н., Хоменко Т.А. Проблемы и методы статистики сбережения населения в соответствии с концепциями СНС // Экономический журнал ВШЭ. 1998. № 4. С. 508–515.
6. Ruggles R. Accounting for saving and capital formation in the United States, 1947 – 1991 // Journal of Economic Perspectives. 1993. Vol. 7. № 2. P. 3–17. doi: 10.1257/jep.7.2.3.
7. Späth J., Schmid K.D. The Distribution of household savings in Germany // IMK Studies. 2016. № 50. 36 p.
8. Kitamura Y., Takayama N., Arita F. Household savings and wealth distribution in Japan. In book: Life cycle savings and public policy: A cross-national study of six countries / ed. A. Börsch-Supan. San Diego: Academic Press, 2003. 34 p.
9. Jäntti M., Sierminska E., Van Kerm P. Modelling the joint distribution of income and wealth // IZA Discussion Papers. 2015. № 9190. 31 p.
10. Римашевская Н.М., Дискин И.Е. Сбережения населения как источник инвестиций // Экономические науки современной России. 1998. № 2. URL: <http://www.cemi.rssi.ru/ecr/1998/2/content2.htm> (дата обращения: 19.04.2018).
11. Матовников М.Ю. Сберегательная активность населения России // Деньги и кредит. 2015. Информационно-аналитические материалы. 2015. № 9. С. 34–39.
12. Чернавский Д.С., Щербаков А.В. Социально-экономический бюллетень. 2016 // Центр социально-экономического прогнозирования им. Д.И. Менделеева. М.: Грифон. 2016. 72 с.
13. Чернавский Д.С., Сулаков Б.А., Чернавская О.Д. и др. О социально-экономической структуре общества // Законодательство и экономика. 1995. Вып. 7-8. С. 8–14.
14. Гюльмамедова Г. Сравнительный анализ моделей денежных и материальных накоплений // Актуальные проблемы экономики. 2012. Т. 138, № 12. С. 322–327.
15. Оруджев Э.Г., Гюльмамедова Г.А. О смешанных задачах на конечном пространстве накоплений // Актуальные проблемы экономики. 2011. № 11. С. 431–441.
16. Крысова Е.В., Шатров А.В. Методы стохастической динамики в математическом моделировании социально-экономических процессов // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2006. № 8. С. 301–315.
17. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика / пер. с англ. М.: Физматлит, 2000. 896 с.
18. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
19. Курзенев В.А., Лычагина Е.Б. Стохастическое моделирование динамики экономической системы // Управленческое консультирование. 2013. № 5 (53). С. 78–83.
20. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения / пер. с англ. М.: Мир, АСТ, 2003. 408 с.
21. Chen Mu-Fa. Stochastic models of economic optimization // Recent Developments in Stochastic Analysis and Related Topics. 2004. doi: 10.1142/9789812702241_0007.
22. Mantegna R.N., Stanley H.E. An introduction to econophysics, correlation and complexity in finance. Cambridge University Press, 2000. 162 p.
23. Kendrick D.A. Stochastic control for economic models. The University of Texas. 2002. URL: <https://liberalarts.utexas.edu/files/495395> (дата обращения: 19.04.2018).

24. Владимирова Д.Б., Деревянкина П.О. Оптимальное управление распределенными системами в задачах социально-экономического анализа // Глобальный научный потенциал. 2016. № 3 (60). С. 40–43.

25. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Научная книга, 1999. 350 с.

Статья поступила в редакцию 24.05.2018, принята к печати 05.09.2018

Сведения об авторах

Первадчук Владимир Павлович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29; e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Владимирова Дарья Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Прикладная математика», Пермский национальный исследовательский политехнический университет (Россия, 614990, г. Пермь, Комсомольский пр., 29).

Деревянкина Полина Олеговна – аспирант кафедры «Прикладная математика» ПНИПУ (614990, Россия, Пермский край, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29, e-mail: p.derevyankina@bk.ru).

References

1. Chernavskii D.S., Pirogov G.G. et. al. Dinamika ekonomicheskoi struktury obshchestva [Dynamics of society economic structure]. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika* [News of Universities. Applied Nonlinear Dynamics], 1996, vol. 4, no. 3, pp. 67–75. (In Russian).

2. Igonina L.L. Investitsionnaya znachimost' sbrezenii naseleniya v Rossiiskoi ekonomike [Significance of population's savings as investment for Russian economy]. *Daidzhest-Finansy* [Digest Finance], 2017, vol. 22, iss. 1 (241), pp. 4–18. (In Russian).

3. Chernavskii D.S., Popkov Yu.S., Rakhimov A.Kh. Matematicheskie modeli tipologii semeinykh nakoplenii [Mathematical modelling of household savings classification]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods], 1994, vol. 30, no. 2, pp. 98–106. (In Russian).

4. Chernavskii D.S., Starkov N.I., Shcherbakov A.V. O problemakh fizicheskoi ekonomiki [On some problems of physical economics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Success of Physical Sciences], 2002, no. 9 (172). (In Russian). doi: 10.3367/UFNr.0172.200209c.1045.

5. Ivanov Yu.N., Khomenko T.A. Problemy i metody statistiki sbrezeniya naseleniya v sootvetstvii s kontseptsiyami SNS [Problems and methods of statistics of population's savings according to the system of national accounts statistics]. *Ekonomicheskii zhurnal VSHE* [Higher School of Economics Economics Journal], 1998, no. 4, pp. 508–515. (In Russian).

6. Ruggles R. Accounting for saving and capital formation in the United States, 1947–1991. *Journal of Economic Perspectives*, 1993, vol. 7, no. 2, pp. 3–17. doi: 10.1257/jep.7.2.3.

7. Späth J., Schmid K.D. The Distribution of household savings in Germany. *IMK Studies*, 2016, no. 50. 36 p.

8. Kitamura Y., Takayama N., Arita F. Household savings and wealth distribution in Japan. In Book: *Life cycle savings and public policy: A cross-national study of six countries*. Ed. A. Börsch-Supan. San Diego, Academic Press, 2003. 34 p.

9. Jäntti M., Sierminska E., Van Kerm P. Modelling the joint distribution of income and wealth. *IZA Discussion Papers*, 2015, no. 9190. 31 p.

10. Rimashevskaya N.M., Diskin I.E. Sbrezeniya naseleniya kak istochnik investitsii [Personal saving as a source of investments]. *Ekonomicheskie nauki sovremennoi Rossii* [Economic Sciences of Contemporary Russia], 1998, no. 2. (In Russian) Available at: <http://www.cemi.rssi.ru/ecr/1998/2/content2.htm> (accessed 19.04.2018).

11. Matovnikov M.Yu. Sberagatel'naya aktivnost' naseleniya Rossii [Savings activity of Russian population]. *Den'gi i kredit* [Money and Credit], 2015, no. 9, pp. 34–39. (In Russian).

12. Chernavskii D.S., Shcherbakov A.V. *Sotsial'no-ekonomicheskii byulleten'. 2016* [Social and economic bulletin. 2016]. Tsentr sotsial'no-ekonomicheskogo prognozirovaniya im. D.I. Mendeleeva. Moscow, Grifon Publ., 2016. 72 p. (In Russian).
13. Chernavskii D.S., Suslakov B.A., Chernavskaya O.D. et.al. O sotsial'no-ekonomicheskoi strukture obshchestva [About social and economic structure of society]. *Zakonodatel'stvo i ekonomika* [Legislation and Economy], 1995, no. 7-8, pp. 8–14. (In Russian).
14. Gyul'mamedova G. Sravnitel'nyi analiz modelei denezhnykh i material'nykh nakoplenii [Comparative Analysis of the models of money and materials accumulation]. *Aktual'nye problemy ekonomiki* [Acute Issues of Economy], 2012, vol. 138, no. 12, pp. 322–327. (In Russian).
15. Orudzhev E.G., Gyul'mamedova G.A. O smeshannykh zadachakh na konechnom prostranstve nakoplenii [About mixed tasks at the final space of savings]. *Aktual'nye problemy ekonomiki* [Acute Issues of Economy], 2011, no. 11, pp. 431–441. (In Russian).
16. Krysova E.V., Shatrov A.V. Metody stokhasticheskoi dinamiki v matematicheskom modelirovanii sotsial'no-ekonomicheskikh protsessov [Stochastic dynamics methods in mathematical modelling of social and economic processes]. *Matematicheskii vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona* [Mathematical Bulletin of Pedagogical Universities and Other Universities of Volga-Vyatka Region], 2006, no. 8, pp. 301–315. (In Russian).
17. Mandel' L., Vol'f E. *Opticheskaya kogerentnost' i kvantovaya optika*. Per. s angl. [Optical coherence and quantum optics. Trans. from Engl.]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000. 896 p. (In Russian).
18. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov chain]. Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1977. 488 p. (In Russian).
19. Kurzhev V.A., Lychagina E.B. Stokhasticheskoe modelirovanie dinamiki ekonomicheskoi sistemy [Stochastic modelling of dynamics of economic system]. *Upravlencheskoe konsul'tirovanie* [Management Consulting], 2013, no. 5 (53), pp. 78–83. (In Russian).
20. Oksendal' B. *Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya. Vvedenie v teoriyu i prilozheniya*. Per. s angl. [Stochastic differential equations. Introduction to the theory and application]. Moscow, Mir, AST Publ., 2003. 408 p. (In Russian).
21. Chen Mu-Fa. Stochastic models of economic optimization. *Recent Developments in Stochastic Analysis and Related Topics*, 2004. doi: 10.1142/9789812702241_0007.
22. Mantegna R.N., Stanley H.E. *An introduction to econophysics, correlation and complexity in finance*. Cambridge University Press, 2000. 162 p. doi: 10.1063/1.1341926.
23. Kendrick D.A. *Stochastic control for economic models*. The University of Texas. 2002. Available at: <https://liberalarts.utexas.edu/files/495395> (accessed 19.04.2018).
24. Vladimirova D.B., Derevyankina P.O. Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami v zadachakh sotsial'no-ekonomicheskogo analiza [Optimal management of distribution systems in the tasks of social and economic analysis]. *Global'nyi nauchnyi potentsial* [Global Scientific Potential], 2016, no. 3 (60), pp. 40–43. (In Russian).
25. Fursikov A.V. *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal management of distribution systems. Theory and application]. Novosibirsk, Nauchnaya kniga Publ., 1999. 350 s. (In Russian).

Received May 24, 2018; accepted September 05, 2018

Information about the Authors

Pervadchuk Vladimir Pavlovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Applied Mathematics Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia; e-mail: pervadchuk@mail.ru).

Vladimirova Dar'ya Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor at Applied Mathematics Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia).

Derevyankina Polina Olegovna – Postgraduate Student at Applied Mathematics Department, Perm National Research Polytechnic University (29, Komsomolsky prospekt, Perm, 614990, Russia; e-mail: p.derevyankina@bk.ru).

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:

Первадчук В.П., Владимирова Д.Б., Деревянкина П.О. Математическое моделирование экономической структуры общества на примере статистических данных по Пермскому краю // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2018. Том 13. № 3. С. 390–401. doi: 10.17072/1994-9960-2018-3-390-401

Please cite this article in English as:

Pervadchuk V.P., Vladimirova D.B., Derevyankina P.O. Mathematical modeling of economic society structure in the case study of the Perm region statistical data. *Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy*, 2018, vol. 13, no. 3, pp. 390–401. doi: 10.17072/1994-9960-2018-3-390-401
