РАЗДЕЛ II. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

doi 10. 17072/1994-9960-2018-4-502-515
УДК 330.4517.929
ББК 22.162+65.0
JEL Code C3, C4

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

Владимир Петрович Максимов
ORCID ID: 0000-0002-0051-3696, Researcher ID: R-9308-2016
Электронный адрес: maksimov@econ.psu.ru
Пермский государственный национальный исследовательский университет
614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15

Современные методы анализа социально-экономических процессов предполагают использование экономико-математических моделей, среди которых широкое распространение получили динамические модели с дискретным временем. Точность идентификации таких моделей существенно влияет на обоснованность результатов анализа и принимаемых на их основе решений. Исследуется задача о возможности и условиях получения гарантированных оценок точности восстановления параметров линейных динамических моделей с дискретным временем по результатам наблюдений за траекторией с учетом случайных ошибок таких наблюдений, имеющих различную природу (ошибки измерений, ошибки спецификации модели, внешние возмущения). Основное внимание уделяется возможности получения гарантированной оценки точности приближенного восстановления параметров линейных систем с дискретным временем и произвольной, но конечной памятью. Представлен обзор известных подходов и методов построения оценок параметров моделей векторной авторегрессии. В рамках эконометрического подхода все варианты методов построения оценок базируются на весьма сильных предположениях о характере случайных ошибок и возмущений (строгая экзогенность, ортогональность, некоррелированность, нормальная распределенность и т.п.). В таком случае речь может идти только о вариантах интервальных оценок для неизвестных параметров и построении доверительных интервалов, соответствующих заданному уровню доверия. Среди результатов, относящихся к исследованию поставленной задачи с точки зрения теории линейных разностных систем с дискретным временем, выделены работы, потенциально содержащие возможность оценки точности восстановления параметров системы. Однако в исследовании показано, что для всех работ этого направления общей является концепция, в рамках которой оценки находятся в результате решения сложной с точки зрения вычислений экстремальной задачи, что существенно затрудняет получение явных гарантированных оценок точности, выраженных в рамках общих ограничений относительно ошибок наблюдений. Новизну исследования составляют математически обоснованный авторский подход к решению задачи в строгом смысле при минимальных предположениях относительно ошибок наблюдений, в рамках которого сформулирована и доказана соответствующая теорема об оценке точности восстановления параметров, дано описание алгоритма и приведен иллюстрирующий пример. Предложенный подход и алгоритм позволяют решать задачу восстановления параметров динамических моделей по результатам наблюдений за моделируемым процессом с точностью, превосходящей точность обычно используемых процедур метода наименьших квадратов и его обобщений. При этом существенное отличие от известных результатов состоит в том, что в условиях доказанной теоремы точность оценок параметров гарантируется в строгом детерминированном смысле. Перспективы дальнейших исследований в этом направлении связаны с применением разработанного инструментария получения гарантированных оценок к анализу динамических моделей с дискретным и непрерывным временем (гибридные модели), включающих в систему как разностные уравнения с дискретным временем, так и уравнения с непрерывным временем в форме автономных функционально-дифференциальных уравнений. Решение этой задачи позволит добиться новых результатов в области идентификации эффектов последействий при моделировании реальных социально-экономических процессов.

Ключевые слова: динамические модели экономики, задачи идентификации, гарантированные оценки, разностные уравнения, системы с дискретным временем, моделирование социально-экономических процессов.

ON THE QUESTION OF PARAMETERS RECONSTRUCTION ACCURACY FOR LINEAR DYNAMIC MODELS WITH DISCRETE TIME

Vladimir P. Maksimov
ORCID ID: 0000-0002-0051-3696, Researcher ID: R-9308-2016
E-mail: maksimov@econ.psu.ru
Perm State University
15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia

Modern methods of analysis of social and economic processes suggest the application of economic and mathematical models among which dynamic models with discrete time are widely spread. The accuracy of these models identification significantly impacts the analysis results validity and decisions made on these results basis. The opportunity and conditions to get guaranteed estimations of reconstruction accuracy of parameters of linear dynamic models with discrete time are discussed in the article. The study is based on the observation results of a trajectory including random errors with different nature (measurement errors, model specification errors, external disturbances). Particular attention is paid to an opportunity of obtaining guaranteed estimates of accuracy of an approximate parameters reconstruction of linear systems with discrete time and random but finite memory. An overview of known approaches and techniques for construction of parameter estimates of vector autoregression models is presented in the study. All options of estimates of construction methods are based on relatively strong theories about the nature of random errors and disturbances (strict exogenity, orthogonality, non-correlatedness, normal distribution, etc.) in the framework of an econometric method. In this case, only interval estimates for unknown parameters and confident intervals corresponding to a given significance level can be constructed. The works that potentially estimate system parameter reconstruction accuracy have been revealed among the results referring to the research of the given task from the view point of the theory of linear difference systems with discrete time. However, we have revealed that all studies in this field are characterized by one concept that suggests the estimates to be made during complex computational task. This fact significantly complicates the derivation of evident guaranteed estimates of accuracy expressed in the frameworks of general restrictions with regard to observation errors. An original mathematically substantiated approach to the task at minimum of assumptions regarding observation errors is the novelty of the study. Corresponding theory about parameters reconstruction accuracy estimation has been suggested and proven in the frameworks of the approach. An algorithm and illustrating case study have also been described in the framework of the approach. The method and algorithm allow us solving the task of parameter reconstruction of dynamic models on the basis of observation results over the simulation process with an accuracy that exceeds of a commonly used procedure of the least square method and its generalizations. However, the significant distinction from the well-known results is that in the terms of the proven theory the accuracy of parameter estimates is guaranteed in a strictly deterministic sense. Further studies in this field will consider the application of the developed tools for obtaining guaranteed estimates to the analysis of dynamic models with discrete and continuous time (hybrid models) including in the system both difference equations with discrete time and equations with continuous time in a form of autonomous functional differential equations. This task solution will allow us to achieve new results in the field of consequence effect identification during simulation of real social and economic processes.

Keywords: economic dynamic models, identification problems, guaranteed estimates, difference equations, systems with discrete time, social and economic process simulation.

Введение

При изучении и моделировании реальных экономических систем приходится наблюдать не один временной ряд, а некоторую совокупность рядов, описывающих совокупность переменных, – так называемые многомерные временные ряды. Целью анализа многомерных временных рядов является их модельное статистическое описание, при этом имеется в виду, что строится (выбирается) модель, описывающая данные наилучшим образом и позволяющая строить наиболее точные прогнозы. Наиболее популярным видом такого рода моделей являются модели векторной авторегрессии (*VAR* модели). Принято считать, что регулярное использование и исследование таких моделей началось в 1980 г., когда *C.A. Sims* [1] предложил *VAR* модели в качестве альтернативы системам одновременных уравнений. Эти модели, будучи линейными моделями, являются довольно удобным инструментом теоретических и прикладных исследований. Легкость и удобство соответствующих вычислительных процедур стали причиной широкого распространения *VAR* моделей. В настоящее время описание таких моделей можно найти в стандартных учебниках по временным рядам и эконометрике[1].

Класс моделей динамики с дискретным временем и постоянными параметрами (коэффициентами) является одним из наиболее популярных как в теоретических, так и в прикладных исследованиях. В линейном случае такая модель имеет вид системы разностных уравнений:

$$y_t = \sum_{j=1}^{p} B_j y_{t-j} + \sum_{k=1}^{q} D_k u_{t-k} + f_t + \varepsilon_t,\ t = 1,\ldots,T, \qquad (1)$$

где векторная переменная $y = col(y_1,\ldots,y_n)$ (набор эндогенных переменных) описывает наблюдаемое состояние моделируемой системы в моменты времени t_i; $u = col(u_1,\ldots,u_r)$ – набор экзогенных (в том числе управляющих) переменных, предыстория всех переменных считается заданной: $y(\xi) = \varphi(\xi), u(\xi) = \psi(\xi)$, если $\xi < 0$. Основная причина наибольшей распространенности моделей (1) – детально разработанная теория оценивания параметров таких моделей.

Модели вида (1) систематически использовались компанией «ПРОГНОЗ» [2] при разработке информационно-аналитических систем. Следует отметить, что в более общем случае неавтономных моделей проблемы их идентификации исследуются в монографии [3]. Основная идея предлагаемого здесь подхода состоит в выделении подмножества моделей со специальными свойствами. Полученные результаты позволяют исследовать так называемые индексы развития динамических процессов и предложить строгие определения понятий спада и подъема. Подчеркнем, что модель (1) в стандартной эконометрической интерпретации является моделью наблюдений: каждое y_t содержит случайное возмущение ε_t, включающее в себя все возможные неучтенные факторы влияния на фазовую переменную. По этой причине модель (1) дает описание реального процесса в стохастическом смысле, а все эконометрические оценки параметров и выводы на основе построенной модели носят статистический характер. Такие оценки и выводы базируются на довольно сильных предположениях относительно случайной составляющей ε_t. Кроме того, разработанные методы применимы, как правило, только к случаю, когда последовательность $\{y_t\}, t = 1, 2, \ldots$ (случайный временной ряд) обладает свойством стационарности в сильном смысле, что обеспечивается соответствующими предположениями относительно матриц B_j [4; 5; 6]. Отдельно отметим работу [7], в которой подробно обсуждаются обобщения задачи аппроксимации финитных последовательностей (временных рядов) решениями разностных уравнений с полностью или частично неизвестными коэффициентами, а также работу [8], где дается теоретическое обоснование сходимости одного итерационного метода восстановления коэффициентов, использующего подход, предлагаемый в [7].

В заключение отметим, что после обзора наиболее значимых отечественных и зарубежных работ по идентификации линейных моделей мы предлагаем рассмотреть линейную детерминированную систему, все компоненты вектора состояний которой доступны наблюдению в конечном числе моментов времени с некоторой погрешностью. Природа этой погрешности неизвестна, и мы не делаем об этом никаких предположений, ограничиваясь только информацией о ее величине: все компоненты погрешности ограничены известными константами. На основе теоремы об обратном операторе формулируется и доказывается утверждение о гарантированной оценке точности приближенных

[1] Greene W.H. Econometric analysis. Prentice Hall, 2002. 1004 p.; Hamilton J.D. Time series analysis. Princeton University Press, 1994. 815 p.; Lütkepohl H. New introduction to multiple time series analysis. Springer-Verlag, 2005. 657 p.

значений коэффициентов модели (этот результат анонсирован без доказательства в кратком сообщении [9]).

Доказанная теорема может найти применение при идентификации линейных гибридных функционально-дифференциальных систем [10–12], которые позволяют моделировать реальные процессы с учетом эффектов последействий, характерных для развития сложных социально-экономических систем.

Методы и процедуры построения оценок параметров линейных динамических моделей

В этом разделе мы останавливаемся только на анализе работ и результатов, имеющих отношение к алгоритмам и процедурам построения приближенных значений параметров линейных разностных систем.

Систематическое и глубокое исследование проблем идентификации указанного класса систем предпринято в цикле работ [13–21]. В этих работах обсуждаются и исследуются различные постановки задач идентификации, варианты постановок экстремальных задач, развивающих идеи классического метода наименьших квадратов, предлагаются методы и алгоритмы нахождения оценок коэффициентов, исследуется сходимость соответствующих итерационных методов, обсуждаются приемы, ускоряющие сходимость. Результаты этих работ имеют высокий потенциал практического использования. В связи с этим особо отметим работу [14], в которой решается задача восстановления параметров однородной линейной модели динамики генной сети. Ряд прикладных аспектов рассмотрен также в [22]. Результаты экспериментов, представленные в [22], показали высокую устойчивость вариационного метода оценки параметров уравнений по отношению к помехам [8; 23; 24; 25].

Отметим, что авторы работ [24; 25] изучают также асимптотические по количеству наблюдений статистические аспекты соответствующей вариационной задачи для случая гауссовских случайных ошибок в элементах исходной последовательности наблюдений. Статистическая состоятельность оценок, полученных вариационным методом, установлена в [25].

В работе[1] рассматриваются *VAR* модели, в которых не предполагается гомоскедастичность инноваций. Проводится сравнительный анализ процедур стандартного МНК (*OLS*), обобщенного МНК (*GLS*) и адаптивного МНК (*ALS*). В частности, отмечается, что *GLS* требует знаний о структуре ковариационной матрицы, зависящей от времени. А при применении *ALS* неизвестная ковариационная матрица оценивается с помощью ядерного сглаживания с использованием внешнего произведения остатков, полученных после применения *OLS*. Выводится асимптотическое распределение предлагаемых оценок и исследуются их свойства. Оценки *ALS* оказываются асимптотически эквивалентными оценкам «недоступного» варианта *GLS* оценок. На основе этих результатов предлагаются тесты на непостоянство инновационных возмущений и версии инструментов коррекции. Теоретические результаты иллюстрируются примером с использованием макроэкономических данных США.

В работе[2] рассматривается *VAR* модель в стандартных предположениях. В случае ее устойчивости модель приводится к форме со скользящими средними. Дается анализ связанных с этой моделью параметров и характеристик – динамических мультипликаторов, передаточной функции, импульсной функции отклика – и обсуждаются актуальные проблемы идентификации моделей указанного класса и их применения при анализе реальных экономических процессов.

В работе [26] описывается методология оценки коэффициентов, тестирования гипотез о спецификации и проведения сценарных экспериментов с *VAR* моделями

[1] Patilea V., Raïssi H. Adaptive estimation of VAR models with time-varying variance: Application to testing linear causality in mean. URL: http://www.leo-univ-orleans.fr/mbFiles/documents/site-du-leo/seminaires-2011/patilea-raissi.pdf (дата обращения: 20.02.2018).

[2] Baum C.F. VAR, SVAR and VECM models. 2013. URL: http://fmwww.bc.edu/EC-C/S2013/823/EC823.S2013.nn10.slides.pdf (дата обращения: 15.02.2018).

межстранового взаимодействия. Используется байесовский подход, построение импульсного отклика и сценарное прогнозирование производятся с использованием процедур метода Монте-Карло. Приводятся результаты, полученные применительно к странам «Большой семерки» (*G7*).

В работе [27] предлагается процедура оценивания глобальных *VAR* моделей (*GVAR*), которая приводит к состоятельным и асимптотически нормальным оценкам параметров. При этом формулируются простые в вычислительном плане условия, гарантирующие устойчивость модели. Эта процедура иллюстрируется примерами оценок, как на примере модельных данных, так и с применением реальной статистической информации. Следует подчеркнуть, что в постановке, принятой автором, вопрос о гарантированной оценке точности получаемых результатов не ставится и не решается.

Отметим, что подробное описание программного комплекса, ориентированного на идентификацию *VAR* моделей, дается в работе *J.H. Kim*[1].

Остановимся теперь на основных результатах работы [28] по методам робастного оценивания *VAR* моделей. Актуальность этих результатов определяется тем обстоятельством, что параметры *VAR* моделей обычно оцениваются с помощью вариантов МНК и оказываются очень чувствительными по отношению к единичным выбросам (значительным случайным ошибкам) наблюдений. В работе предлагается новая процедура оценивания, которая представляет собой многомерное обобщение взвешенного МНК.

Так, типичная K-мерная модель авторегрессии порядка p имеет вид

$$Y_t = \nu + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + \ldots + B_p Y_{t-p} + U_t, \qquad (2)$$

в которой ошибки U_t считаются независимыми и одинаково распределенными с плотностью вероятностей вида

$$f_{U_t}(x) = \frac{g(x^T \Sigma^{-1} x)}{(\det(\Sigma))^{1/2}},$$

где Σ – положительно определенная матрица (матрица рассеяния), g – положительная функция. Если существуют вторые моменты случайной величины U_t, то Σ пропорциональна ковариационной матрице случайных ошибок.

Такая модель обычно оценивается методом наименьших квадратов, который чрезвычайно чувствителен по отношению к возможным выбросам в наблюдениях, поэтому актуальной является задача разработки робастного оценивания для указанного класса моделей. Предположим, имеются наблюдения $Y_t, t = 1-p, \ldots, T$. Вводя обозначения

$$X_t = (1, Y'_{t-1}, \ldots, Y'_{t-p})', \quad B = (\nu, B_1, \ldots, B_p)',$$

где $(\cdot)'$ – символ транспонирования, можно записать (2) в виде

$$Y_t = B' X_t + U_t,$$

или, вводя матрицы

$$X = (X_1, \ldots, X_T)', \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_T)',$$

в форме стандартной множественной регрессии

$$Y = X B + U.$$

Отсюда сразу получаем оценку параметров

$$\hat{B}_{LS} = (X' X)^{-1} X' Y$$

и оценку матрицы Σ:

$$\hat{\Sigma}_{LS} = \tfrac{1}{T-K}(Y - X\hat{B}_{LS})'(Y - X\hat{B}_{LS}).$$

МНК оценки матрицы B и Σ находятся под сильным влиянием упомянутых выбросов, что приводит к сильно смещенным оценкам и ошибочным прогнозам. Выбросы могут иметь различный характер. Наиболее известны так называемые инновационные и аддитивные выбросы. В контексте *VAR* моделей наблюдение Y_t называется инновационным выбросом, если соответствующая ошибка в уравнении (3) является «загрязненной». Благодаря динамической структуре модели инновационный выброс будет воздействовать и на последующие наблюдения. С другой стороны, наблюдение Y_t называется аддитивным выбросом, если только само это значение оказывается «загрязненным». Хотя адди-

[1] Kim J.H. Package ‘VAR.etp’. February 19, 2015. URL: https://cran.r-project.org/web/packages/VAR.etp/VAR.etp.pdf (дата обращения: 28.03.2018).

тивный выброс является изолированным, он может все-таки приводить к смещению оценок параметров модели. Один из способов преодоления проблем выбросов связан с применением специальных робастных процедур оценивания, включающих обнаружение и удаление выбросов. Многомерность *VAR* моделей усугубляет проблему обнаружения выбросов по сравнению с ситуацией одномерных временных рядов, поэтому соответствующие процедуры должны быть ориентированы на применение в многомерной ситуации.

Два метода построения робастных оценок для многомерных временных рядов были предложены в работе [29]: *Minimum Volume Ellipsoid* (*MVE*) и *Minimum Covariance Determinant* (*MCD*). Второй метод дает теоретически более высокую степень состоятельности, поэтому ограничимся кратким описанием этого метода. Пусть имеется n наблюдений $Z_n = \{(x_i, y_i); i = 1, \ldots, n\}$. *MCD* оценка – это *LS* оценка, вычисленная на подвыборке из h наблюдений, соответствующая минимальному значению определителя ковариационной матрицы остатков. Для этого метода быстрые алгоритмы вычисления оценок разработаны в [30]. В работе [31] представлен эквивалентный вариант, связанный с оценкой усеченного метода наименьших квадратов (*Least Trimmed Squares*, *LTS*). Пусть $H_h = \{M \subset \{1, \ldots, n\} \mid \#M = h\}$ – совокупность всех подмножеств с числом элементов *h*.

В принятых обозначениях оценка многомерного *LTS* определяется равенством

$$\hat{B}_{MLTS}(Z_n) = \hat{B}_{LS}(\hat{H}_h),$$

$$\hat{H}_h = \arg\min_{M \in H_h} \det \hat{\Sigma}_{LS}(M).$$

В работе [31] показано, что эта оценка может быть определена эквивалентным образом с помощью равенства

$$\hat{B}_{MLTS} = \arg\min_{B,\Sigma:\, \det\Sigma = 1} \sum_{s=1}^{h} d_{(s)}^2(B,\Sigma), \tag{3}$$

где $d_{(1)}(B,\Sigma) \le d_{(2)}(B,\Sigma) \le \ldots \le d_{(n)}(B,\Sigma)$ – упорядоченная последовательность расстояний Махаланобиса,

$$d_t(B,\Sigma) = ((Y_t - B'X_t)'\Sigma^{-1}(Y_t - B'X_t))^{1/2}.$$

В работе [32] предложен вариант, в рамках которого при суммировании в (3) вводятся весовые коэффициенты, дающие при условии удачного подбора более точный результат. К сожалению, вопрос о целесообразном выборе весовых коэффициентов остается открытым. Некоторые соображения по этому поводу можно найти в работе [33].

В работе [28] предлагается новый метод оценивания *VAR* моделей, а именно многомерный взвешенный метод наименьших квадратов. Как было показано в [33; 34] для одномерного случая, этот вариант метода дает лучшие результаты, чем метод урезанных наименьших квадратов. Естественно ожидать, что этот эффект сохранится и в многомерном случае. Предлагаемая модификация может оказаться полезной для получения более устойчивых результатов и в других областях, в частности применительно к дискриминантному анализу и кластерному анализу.

Для всех цитированных работ общей является концепция, в рамках которой оценки находятся в результате решения сложной с точки зрения вычислений экстремальной задачи, что существенно затрудняет получение явных гарантированных оценок точности, выраженных в рамках общих ограничений относительно ошибок наблюдений.

Построение гарантированных оценок линейных динамических моделей с дискретным временем

Вернемся к модели (1). Принципиальный момент здесь – гипотеза о постоянстве параметров модели. Подчеркнем, что модель (1) в стандартной эконометрической интерпретации является моделью наблюдений: каждое y_t содержит случайное возмущение ε_t, включающее в себя все возможные неучтенные факторы влияния на фазовую переменную. По этой причине модель (1) дает описание реального процесса в стохастическом смысле, а все эконометрические оценки параметров и выводы на основе построенной модели носят статистический характер.

Принципиальное отличие рассматриваемой в этом разделе задачи состоит в следующем. Мы рассматриваем линейную детерминированную систему, все компоненты вектора состояний которой доступны наблюдению в конечном числе моментов времени с некоторой погрешностью. Природа этой погрешности неизвестна, и мы не делаем об этом никаких предположений, ограничиваясь только информацией о ее величине: все компоненты погрешности ограничены известными константами. На основе теоремы об обратном операторе мы формулируем и доказываем теорему о гарантированной оценке точности приближенных значений коэффициентов модели. Доказательство носит конструктивный характер и приводит к алгоритму получения упомянутых коэффициентов и соответствующей оценки их точности. Этот результат может найти применение при приближенной идентификации линейных гибридных функционально-дифференциальных систем [10–12].

Рассмотрим линейную модель, описывающую динамику текущего состояния $x_t \in R^n$ изучаемой системы:

$$x_t = A_1 x_{t-1} + A_2 x_{t-2} + \ldots + A_p x_{t-p} + f_t,\quad t = 1,\ldots,T. \tag{4}$$

Матрицы A_i, $i = 1,\ldots,p$ размерности $n \times n$ неизвестны и должны быть приближенно вычислены на основе приближенных значений компонент состояния и приближенных значений внешнего возмущения f_t, полученных в моменты времени $t = 1,\ldots,T$. При этом предполагается, что для упомянутых погрешностей известна лишь оценка сверху по абсолютной величине:

если z_{it}-измерение i-й компоненты x_{it} вектора x_t, то

$$| z_{it} - x_{it} | \le \xi_i,\ i = 1,\ldots,n,$$

и аналогично для g_{it}-измерения i-й компоненты f_{it} вектора f_t имеем

$$| g_{it} - f_{it} | \le \eta_i,\ i = 1,\ldots,n.$$

Эти предположения касаются также начального состояния x_0 и предыстории $x_{-1},\ldots,x_{1-p}$. Примем естественное ограничение относительно числа точек наблюдения: $T > np$. В последовательности состояний системы выделим отрезок, начинающийся в момент $t = k$ и содержащий np элементов. Введем матричные обозначения для всей совокупности используемой в дальнейшем информации:

$$X_k = (x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+pn-1}),$$

$$\mathcal{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_p),$$

$$\mathcal{X}_k = \begin{pmatrix} x_{k-1} & x_k & \ldots & x_{k+pn-2} \\ x_{k-2} & x_{k-1} & \ldots & x_{k+pn-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{k-p} & x_{k-(p-1)} & & x_{k+pn-(p-1)} \end{pmatrix},$$

$$F_k = (f_k, f_{k+1}, \ldots, f_{k+pn-1}).$$

В этих обозначениях имеем систему $X_k = \mathcal{A}\mathcal{X}_k + F_k$ с квадратной $(np \times np)$ - матрицей $\mathcal{X}_k$. При точных измерениях и обратимости матрицы $\mathcal{X}_k$ матрица $\mathcal{A}$ может быть вычислена точно: $\mathcal{A} = (X_k - F_k)\mathcal{X}_k^{-1}$. При этом результат не зависит от k. По условиям задачи эта возможность не реализуется. Для приближенного вычисления $\mathcal{A}$ можно воспользоваться доступной информацией, а именно матрицами

$$\mathcal{Z}_k = \begin{pmatrix} z_{k-1} & z_k & \ldots & z_{k+pn-2} \\ z_{k-2} & z_{k-1} & \ldots & z_{k+pn-3} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{k-p} & z_{k-(p-1)} & & z_{k+pn-(p-1)} \end{pmatrix},$$

$$Z_k = (z_k, z_{k+1}, \ldots, z_{k+pn-1}),$$

$$G_k = (g_k, g_{k+1}, \ldots, g_{k+pn-1}).$$

Для построения приближения $\mathcal{A}_k$, соответствующего фиксированному k, можно воспользоваться системой

$$Z_k = \mathcal{A}_k \mathcal{Z}_k + G_k. \tag{5}$$

Для получения оценки погрешности такого приближения введем соответствующие линейные нормированные пространства. Пусть $R^{n\times np}$ – линейное пространство $(n \times np)$-матриц $H = \{h_{ij}\}_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,np}$ с нормой $\| H \|_{R^{n\times np}} = \max_{i=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{np} | h_{ij} |\}$. Норму линейного оператора в этом пространстве (оператора умножения справа на $(np\times np)$-матрицу) обозначим символом $\|\cdot\|_{R^{n\times np}\to R^{n\times np}}$.

Пусть Ξ – множество таких значений *k*, для которых матрица $\mathcal{Z}_k$ обратима.

Рассмотрим случай, когда Ξ – непустое множество. Для $k\in\Xi$ имеем $\mathcal{A}_k = (Z_k - G_k)\mathcal{Z}_k^{-1}$.

Отметим, что при каждом $k\in\Xi$ полученное приближение имеет свою погрешность. Далее сформулируем условия, при которых разность $\mathcal{A}_k - \mathcal{A}$ оценивается по норме пространства $R^{n\times np}$ и можно сделать выбор в пользу наиболее точного результата.

Для формулировки теоремы о гарантированной оценке точности восстановления параметров системы (4) введем следующие обозначения:

$$W_k = \{w_{lj}^k\}_{j=1,\dots,pn}^{l=1,\dots,pn} = Z_k^{-1},\ k\in\Xi;$$

$$\varsigma_k = \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{pn} | w_{lj}^k |\};\quad \xi = \max_{i=1,\dots,n}\xi_i;$$

$$\eta = \max_{i=1,\dots,n}\eta_i;\quad \Delta_k = pn\xi\varsigma_k;$$

$$\Xi_0 = \{k\in\Xi : \Delta_k < 1\};\quad \nu_k = \| Z_k - G_k \|_{R^{n*np}};$$

$$\Theta_k = (1-\Delta_k)^{-1}\Delta_k\varsigma_k(pn(\xi+\eta)+\nu_k) + \varsigma_k pn(\xi+\eta).$$

Теорема. *Пусть множество* Ξ_0 *непусто. Тогда существует приближение* $\mathcal{A}^*$ *к матрице* $\mathcal{A}$*, для которого имеет место оценка погрешности*

$$\delta^* = \| \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \|_{R^{n\times np}} \le \min_{k\in\Xi_0}\{\Theta_k\}. \qquad (6)$$

Матрица $\mathcal{A}^*$ *определяется равенством*

$$\mathcal{A}^* = (Z_{k_0} - G_{k_0})Z_{k_0}^{-1},$$

$$k_0 = \arg\min_{k\in\Xi_0}\{\Theta_k\}.$$

Доказательство. Воспользуемся известной теоремой об обратном операторе (см. [35, с. 99]). В силу этой теоремы, обратимость одного из двух линейных ограниченных операторов L, L_0, действующих в банаховом пространстве X, скажем для определенности, L_0, влечет обратимость другого, если $\Delta = \| L - L_0 \|\cdot\| L_0^{-1} \| < 1$. При этом имеет место оценка

$$\| L^{-1} - L_0^{-1} \| \le (1-\Delta)^{-1}\Delta \| L_0^{-1} \|. \qquad (7)$$

Получим в этих условиях оценку для разности решений уравнений x и x_0 уравнений $Lx = f$ и $L_0 x = f_0$ соответственно:

$$\| x - x_0 \| \le \| L^{-1} f - L_0^{-1} f_0 \| = \| L^{-1} f -$$
$$- L_0^{-1} f + L_0^{-1} f - L_0^{-1} f_0 \| \le \| L^{-1} f - L_0^{-1} f \| +$$
$$+ \| L_0^{-1} f - L_0^{-1} f_0 \| \le \| L^{-1} - L_0^{-1} \|\cdot\| f \| +$$
$$+ \| L_0^{-1} \|\cdot\| f - f_0 \| \le \| L^{-1} - L_0^{-1} \|\cdot\| f -$$
$$- f_0 + f_0 \| + \| L_0^{-1} \|\cdot\| f - f_0 \| \le \| L^{-1} - L_0^{-1} \|\cdot\| f -$$
$$- f_0 \| + \| L^{-1} - L_0^{-1} \|\cdot\| f_0 \| + \| L_0^{-1} \|\cdot\| f - f_0 \|. \qquad (8)$$

С учетом оценки (7) получаем окончательно

$$\| x - x_0 \| \le (1-\Delta)^{-1}\Delta \| L_0^{-1} \| (\| f - f_0 \| +$$
$$+ \| f_0 \|) + \| L_0^{-1} \|\cdot\| f - f_0 \|. \qquad (9)$$

Подчеркнем одну особенность этой оценки, которая будет использована ниже. Правая часть неравенства (9) выражена в терминах, касающихся только характеристик оператора L_0^{-1} правой части f_0 и отклонений $\| L - L_0 \|$, $\| f - f_0 \|$. При использовании оценки знание оператора L и правой части f не требуется.

Покажем, что условия теоремы об обратном операторе выполнены и оценка (8) принимает вид (6) при некотором $k\in\Xi$. Заметим сначала, что матричная норма, определенная равенством для ς_k, согласована с введенной нормой в пространстве $R^{n\times np}$. Это следует непосредственно из неравенств (индекс k для краткости опускаем)

$$\| \mathcal{A}W \|_{R^{n\times pn}} = \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{m=1}^{pn} | \sum_{j=1}^{pn} a_{lj} w_{jm} |\} \le$$
$$\le \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{pn}\sum_{m=1}^{pn} | a_{lj} || w_{jm} |\} \le \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{pn} | a_{lj} | \sum_{m=1}^{pn} | w_{jm} |\} \le$$
$$\le \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{pn} | a_{lj} | \max_{j=1,\dots,pn}\{\sum_{m=1}^{pn} | w_{jm} |\}\} \le$$
$$\le \max_{l=1,\dots,n}\{\sum_{j=1}^{pn} | a_{lj} |\}\cdot \max_{j=1,\dots,pn}\{\sum_{m=1}^{pn} | w_{jm} |\}.$$

В рассматриваемом случае роль оператора L_0 играет оператор умножения справа на матрицу Z_k, а роль оператора L – оператор умножения справа на матрицу $\mathcal{X}_k$. Оценим разность этих операторов с учетом предположений о погрешности наблюдений:

$$\| \mathcal{X}_k - \mathcal{Z}_k \|_{R^{n\times pn} \to R^{n\times pn}} \le pn \max_{i=1,\dots,n}\{\xi_i\} \le pn\xi.$$

После умножения на ς_k правой части этого неравенства получаем Δ_k. Таким образом, на множестве Ξ_0 выполняется основное условие теоремы об обратном операторе. Для получения оценки (6) остается заметить, что для аналога $\| f - f_0 \|$ имеем

$$\| (Z_k - G_k) - (X_k - F_k) \|_{R^{n*pn}} =$$
$$= \| (Z_k - X_k) - (G_k - F_k) \|_{R^{n*pn}} \le$$
$$\le \| (Z_k - X_k) \|_{R^{n*pn}} + \| (G_k - F_k) \|_{R^{n*pn}} \le pn(\xi + \eta).$$

Приведем иллюстрирующий пример. Для системы (4) в случае $p = 1$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2.31 & 0.82 \\ 0.71 & -0.10 \end{pmatrix},$$

$f_t = 0,\ x_{1,0} = 5,\ x_{2,0} = 10$, для возмущения последовательных десяти состояний были использованы псевдослучайные числа с равномерным на отрезке[–0.01, 0.01] распределением:

для первой компоненты состояния –0.001451606618, –0.003577786134, –0.003127338526, –0.000514877128, 0.00116917438, 0.00493507661, –0.009358755558, 0.00445948244, 0.00208611228, 0.00491160075;

для второй компоненты состояния 0.00902107060, –0.007070273856, –0.006888184730, –0.001412146526, 0.00050857022, –0.004547987820, –0.005604798012, 0.00351965868, 0.00690947019, 0.00352941577.

В этом примере общая оценка сверху для модуля погрешности наблюдений составляет 0.01. В процессе вычислений все матрицы $\mathcal{Z}_k,\ k = 1,\dots,10$ оказались обратимыми, что позволило найти приближения $\mathcal{A}_k,\ k = 1,\dots,10$. Наилучшую гарантированную оценку погрешности дает матрица

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} 2.309915668 & 0.817672385 \\ 0.7096748133 & -0.0994980712 \end{pmatrix}.$$

При этом гарантированная оценка погрешности δ^* по введенной норме пространства $R^{2\times 2}$ составляет 0.01072151360. В приведенных числовых значениях все цифры верные (система *Maple*, с помощью которой производились вычисления, позволяет точно производить арифметические операции над рациональными числами). Следует отметить, что результат, полученный с помощью стандартного метода наименьших квадратов на том же наборе исходных данных, представляет собой матрицу

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2.385031259 & 0.5424549044 \\ 0.7646269870 & -0.3029516038 \end{pmatrix}.$$

При этом оценка погрешности составляет 0.3525765550.

Таким образом, в рамках предлагаемого подхода появляется возможность повышения точности восстановления параметров динамической модели с дискретным временем.

Заключение

Результаты применения эконометрического подхода, представленные в обзоре, не дают решения задачи о гарантированных оценках точности восстановления параметров динамической модели. Мы исходим из других предположений относительно характеристик возмущений наблюдаемых значений. В условиях доказанной теоремы требования к точности наблюдений описываются в терминах верхних оценок абсолютных значений погрешностей. Использование известной теоремы об обратном операторе и конструктивный характер доказательства приводят к алгоритму построения гарантированных оценок точности восстановления параметров модели и, таким образом, открывают возможность повышения надежности вычисляемых по модели прогнозных значений моделируемого процесса.

Перспективы дальнейших исследований в этом направлении связаны с возможным расширением класса рассматриваемых моделей. Одним из таких расширений является актуальный класс динамических моделей с дискретным и непрерывным временем (гибридные модели), включающих в систему как разностные уравнения с дискретным временем, так и уравнения с непрерывным временем в форме автономных функционально-дифференциальных уравнений. Последние позволяют учитывать при моделировании реальных процессов эффекты последействия, характерные, в частности, для процессов экономической динамики. Распространение предлагаемого подхода на актуальные гибридные экономико-математические модели приведет к повышению адекватности моделей, лежащих в основе современного инструментария анализа социально-экономических процессов, что позволит повысить обоснованность выводов и принимаемых решений.

Благодарности

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (договор № 02.G25.31.0039) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-0032).

Список литературы

1. *Sims C.A.* Macroeconomics and reality // Econometrica. 1980. Vol. 48. № 1. P. 1–48.
2. *Андрианов Д.Л.* и др. Целевое управление процессами социально-экономического развития субъектов Российской Федерации: моделирование, информационное, математическое и инструментальное обеспечение. Пермь: Перм. гос. ун-т, 2008. 239 с.
3. *Фурасов В.Д.* Моделирование плохоформализуемых процессов. М.: Академия, 1997. 223 с.
4. *Абакумова Ю.Г.* Применение моделей векторной авторегрессии для исследования процентного канала трансмиссионного механизма монетарной политики Республики Беларусь // Экономика и управление. 2011. № 2 (26). С. 88–94.
5. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 224 с.
6. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. Пер. с англ. М.: Наука, 1977. 334 с.
7. *Ахиезер Н.И.* Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М.: Физматгиз, 1961. 314 с.
8. *Будянов В.П., Егоршин А.О.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. Т. 1. С. 78–82.
9. *Максимов В.П.* О гарантированной оценке восстановления коэффициентов линейной разностной системы // Известия вузов. Математика. 2015. № 10. С. 72–75.
10. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Гибридные модели в задачах экономической динамики // Вестник Пермского университета. Серия: Экономика. 2011. № 2 (9). С. 13–23.
11. *Максимов В.П., Чадов А.Л.* Об одном классе управлений для функционально-дифференциальной непрерывно-дискретной системы // Известия вузов. Математика. 2012. № 9. С. 71–75.
12. *Chadov A., Maksimov V.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. Vol. 19. № 1–2. P. 45–58.
13. *Демиденко В.Г.* Восстановление коэффициентов систем линейных разностных уравнений // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 45–53.
14. *Демиденко В.Г.* Восстановление параметров однородной линейной модели динамики генной сети // Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 51–59.
15. *Егоршин А.О.* Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов // Оптимальные и самонастраивающиеся системы. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1971. С. 40–53.
16. *Егоршин А.О.* Метод наименьших квадратов и быстрые алгоритмы идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. Т. 1. С. 30–42.

17. *Егоршин А.О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 2. С. 78–96.

18. *Егоршин А.О.* Идентификация стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. Т. 65 (12). С. 29–48.

19. *Егоршин А.О.* Об отслеживании параметров экстремума в вариационной задаче идентификации // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 3. С. 95–114.

20. *Егоршин А.О.* О дискретизации линейных дифференциальных уравнений // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. Вып. 14. С. 59–72.

21. *Егоршин А.О.* Об одной оптимизационной задаче моделирования и идентификации динамического процесса // Методы оптимизации и их приложения: труды XI Байкальской междунар. школы-семинара. Иркутск, 1997. С. 73–77.

22. *Egorshin A.O.* On optimal identification and modeling problem // Identification and System Parameter Estimation: Proceedings IV IFAC Symp. Tbilisi, 1976. Amsterdam; New York; Oxford: North-Holland Publ. Co., 1978. Vol. 3. P. 2143–2154.

23. *Будянов В.П., Егоршин А.О., Филиппова Н.П.* О прямом подходе к задаче идентификации // Автометрия. 1976. Т. 2. С. 10–23.

24. *Aoki M., Yue P.C.* On a priori error estimates of some identification methods // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. Vol. AC-15, № 5. P. 541–548.

25. *Aoki M., Yue P.C.* On certain convergence questions in system identification // SIAM Journal Control. 1970. Vol. 8, № 2. P. 239–256.

26. *Canova F., Ciccarelli M.* Estimating multi-country VAR models // ECB Working Paper Series. 2006. № 603. URL: http://ssrn.com/abstract_id=890987 (дата обращения: 12.02.2018).

27. *Mutl J.* Consistent estimation of global VAR models // Economics Series. 2009. № 234. P. 1–34.

28. *Jonáš P.* Robust estimation of the VAR Model // WDS'09 Proceedings of Contributed Papers. 2009. Part I. P. 143–147.

29. *Rousseeuw P.J., Leroy A.M.* Robust regression and outlier detection. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore: John Wiley & Sons, 1987. 346 p.

30. *Rousseeuw P.J., Van Driessen K.* A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator // Technometrics. 1999. Vol. 41. № 3. P. 212–223.

31. *Agulló J., Croux C., Van Aelst S.* The multivariate least-trimmed squares estimator // Journal of Multivariate Analysis. 2008. Vol. 99. Iss. 3. P. 311–338.

32. *Víšek J.A.* Regression with high breakdown point // ROBUST. 2000. P. 324–356.

33. *Măs´ıček L.* Diagnostika a senzitivita robustn´ıch model°u, PhD thesis, 2004. 103 p.

34. *Jurczyk T.* High breakdown point estimation in regression // WDS'08 Proceedings of Contributed Papers. 2008. Part I. P. 94–99.

35. *Хатсон В., Пим Дж.* Приложения функционального анализа и теории операторов. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 431 с.

Статья поступила в редакцию 20.09.2018, принята к печати 22.11.2018

Сведения об авторе

Максимов Владимир Петрович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет (Россия, 614990, г. Пермь, ул. Букирева, 15; e-mail: maksimov@econ.psu.ru).

Acknowledgements

The study was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (Contract No. 02.G25.31.0039) and the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 18-01-00332).

References

1. Sims C.A. Macroeconomics and reality. *Econometrica*, 1980, vol. 48, no. 1, pp 1–48.
2. Andrianov D.L. et al. *Tselevoe upravlenie protsessami sotsial'no-ekonomicheskogo razvitiya sub"ektov Rossiiskoi Federatsii: modelirovanie, informatsionnoe, matematicheskoe i instrumental'noe obespechenie* [Target management of social and economic development processes of the Russian Federation entities: Modelling, information, mathematical and instrumental support]. Perm, Perm. gos. un-t, 2008. 239 p. (In Russian).
3. Furasov V.D. *Modelirovanie plokhoformalizuemykh protsessov* [Modeling of poorly formalized processes]. Moscow, Akademiya, 1997. 223 p. (In Russian).
4. Abakumova Yu.G. Primenenie modelei vektornoi avtoregressii dlya issledovaniya protsentnogo kanala transmissionnogo mekhanizma monetarnoi politiki Respubliki Belarus' [Application of an autoregression vector model for the study of the percentage channel of the transmission mechanism of the monetary policy of the Republic of Belarus]. *Ekonomika i upravlenie* [Economy and Management], 2011, no. 2 (26), pp. 88–94. (In Russian).
5. Albert A. *Regressiya, psevdoinversiya i rekurrentnoe otsenivanie.* Per. s angl. [Regression and the moor-penrose pseudoinverse. Transl. from Engl.]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 224 p. (In Russian).
6. Aoki M. *Vvedenie v metody optimizatsii*. Per. s angl. [Introduction to optimization techniques. Transl. from Engl.]. Moscow, Nauka Publ., 1977. 334 p. (In Russian).
7. Akhiezer N.I. *Klassicheskaya problema momentov i nekotorye voprosy analiza, svyazannye s neyu* [Conventional problem of moments and some issues related to its analysis]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961. 314 p. (In Russian).
8. Budyanov V.P., Egorshin A.O. Sglazhivanie signalov i otsenivanie dinamicheskikh parametrov s pomoshch'yu TSVM [Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters using digital computer]. *Avtometriya* [Autometry], 1973, vol. 1, pp. 78–82. (In Russian).
9. Maksimov V.P. O garantirovannoi otsenke vosstanovleniya koeffitsientov lineinoi raznostnoi sistemy [On guaranteed estimate of reconstruction error of parameters of linear difference system]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [News of Universities. Mathematics], 2015, no. 10, pp. 72–75. (In Russian).
10. Maksimov V.P., Chadov A.L. Gibridnye modeli v zadachakh ekonomicheskoi dinamiki [Hybrid models in economic dynamics tasks]. *Vestnik Permskogo universiteta. Seriya "Ekonomika"* [Perm University Herald. ECONOMY], 2011, no. 2 (9), pp. 13–23. (In Russian).
11. Maksimov V.P., Chadov A.L. Ob odnom klasse upravlenii dlya funktsional'no-differentsial'noi nepreryvno-diskretnoi sistemy [A class of controls for a functional-differential continuous-discrete system] *Izvestiya vuzov. Matematika* [News of Universities. Mathematics], 2012, no. 9, pp. 71–75. (In Russian).
12. Chadov A., Maksimov V. Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations and discrete times. *Functional Differential Equations*, 2012, vol. 19, no. 1–2, pp. 45–58.
13. Demidenko V.G. Vosstanovlenie koeffitsientov sistem lineinykh raznostnykh uravnenii [Reconstruction of coefficients of linear difference equations systems]. *Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika* [Herald of NSU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2010, vol. 10, no. 2. pp. 45–53. (In Russian).
14. Demidenko V.G. Vosstanovlenie parametrov odnorodnoi lineinoi modeli dinamiki gennoi seti [Parameters reconstruction of the homogenous linear models of the gene network dynamics]. *Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika* [Herald of NSU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2008, vol. 8, no. 3, pp. 51–59. (In Russian).
15. Egorshin A.O. Vychislitel'nye zamknutye metody identifikatsii lineinykh ob"ektov [Computational closed-loop methods for identification of linear objects]. *Optimal'nye i samonastraivayushchiesya sistemy* [Optimal and Self-adjusting Systems]. Novosibirsk, IAIE SO AN SSSR, 1971, pp. 40–53. (In Russian).

16. Egorshin A.O. Metod naimen'shikh kvadratov i bystrye algoritmy identifikatsii i fil'tratsii (metod VI) [The least squares method and fast algorithms of identification and filtration (VI method)]. *Avtometriya* [Autometry], 1988, vol. 1, pp. 30–42. (In Russian).

17. Egorshin A.O. Ob odnom sposobe otsenki koeffitsientov modeliruyushchikh uravnenii dlya posledovatel'nostei [On a method for estimating the coefficients of modeling equations for sequences]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki* [Siberian Journal of Industrial Mathematics], 2000, vol. 3, no. 2, pp. 78–96. (In Russian).

18. Egorshin A.O. Identifikatsiya statsionarnykh modelei v unitarnom prostranstve [Optimization of parameters of stationary models in a unitary space]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control], 2004, vol. 65 (12), pp. 29–48. (In Russian).

19. Egorshin A.O. Ob otslezhivanii parametrov ekstremuma v variatsionnoi zadache identifikatsii [On tracking extremum parameters in the identification variational problem]. *Vestnik NGU. Seriya: Matematika, mekhanika, informatika* [Herald of NSU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2011, vol. 11, no. 3, pp. 95–114. (In Russian).

20. Egorshin A. O. O diskretizatsii lineinykh differentsial'nykh uravnenii [On linear differential equation discretization]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie"* [Herald of South Ural State University. Series "Mathematical Modelling and Programming"], 2012, no. 14, pp. 59–72. (In Russian).

21. Egorshin A.O. Ob odnoi optimizatsionnoi zadache modelirovaniya i identifikatsii dinamicheskogo protsessa [About an optimization task of modelling and identification of dynamic process]. *Trudy XI Baikal'skoi mezhdunarodnoi shkoly – seminara "Metody optimizatsii i ikh prilozheniya"* [Proceedings of the XI Baikal international school – seminar "Methods of optimization and their application"]. Irkutsk, 1997, pp. 73–77. (In Russian).

22. Egorshin A.O. On optimal identification and modeling problem. *Proc. IV IFAC Symp. «Identification and System Parameter Estimation», Tbilisi, 1976*. Amsterdam, New York, Oxford, North–Holland Publishing Co., 1978, vol. 3, pp. 2143–2154.

23. Budyanov V.P., Egorshin A.O., Filippova N.P. O pryamom podkhode k zadache identifikatsii [About a direct approach to identification task]. *Avtometriya* [Autometry], 1976, vol. 2, pp. 10–23. (In Russian).

24. Aoki M., Yue P. C. On a priori error estimates of some identification methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1970, vol. 15, iss. 5, pp. 541–548.

25. Aoki M., Yue P.C. On certain convergence questions in system identification. *SIAM* Journal on Control, 1970, vol. 8, no. 2, pp. 239–256.

26. Canova F., Ciccarelli M. Estimating multi-country VAR models. *ECB Working Paper Series*, 2006, no. 603. Available at: http://ssrn.com/abstract_id=890987 (accessed 12.02.2018).

27. Mutl J. Consistent estimation of global VAR models. *Economics Series*, 2009, no. 234, pp. 1–34.

28. Jonáš P. Robust estimation of the VAR model. *WDS'09 Proceedings of Contributed Papers*, 2009, part I, pp. 143–147.

29. Rousseeuw P.J., Leroy A.M. *Robust Regression and Outlier Detection*. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, John Wiley & Sons, 1987. 346 p.

30. Rousseeuw P.J., Van Driessen K. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator. *Technometrics*, 1999, vol. 41, no. 3, pp. 212–223.

31. Agulló J., Croux C., Van Aelst S. The multivariate least-trimmed squares estimator. *Journal of Multivariate Analysis*, 2008, vol. 99, iss. 3 pp. 311–338.

32. *Višek J. A.* Regression with high breakdown point. ROBUST, 2000, pp. 324–356.

33. Măs´ıček L. Diagnostika a senzitivita robustn´ıch model°u, PhD thesis, 2004. 103 p.

34. Jurczyk T. High breakdown point estimation in regression. *WDS'08 Proceedings of Contributed Papers*, 2008, part I, pp. 94–99.

35. Hutson V.C.L., Pym J.S. Prilozheniya funktsional'nogo analiza i teorii operatorov. Per. s angl. [Application of functional analysis and operator theory. Transl. from Engl.]. Moscow, Mir Publ., 1983. 431 p. (In Russian).

Received September 20, 2018; accepted November 22, 2018

Information about the Author

Maksimov Vladimir Petrovich – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Professor at the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State University (15, Bukireva st., Perm, 614990, Russia; e-mail: maksimov@econ.psu.ru).

Просьба ссылаться на эту статью в русскоязычных источниках следующим образом:
Максимов В.П. К вопросу о точности восстановления параметров линейных динамических моделей с дискретным временем // Вестник Пермского университета. Сер. «Экономика» = Perm University Herald. Economy. 2018. Том 13. № 4. С. 502–515. doi: 10.17072/1994-9960-2018-4-502-515

Please cite this article in English as:
Maksimov V.P. On the question of parameters reconstruction accuracy for linear dynamic models with discrete time. *Vestnik Permskogo universiteta. Seria Ekonomika = Perm University Herald. Economy*, 2018, vol. 13, no. 4, pp. 502–515. doi: 10.17072/1994-9960-2018-4-502-515